

**Appunti per il corso di  
Equazioni alle derivate parziali**

Daniele Andreucci

Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici

Università di Roma La Sapienza

via Antonio Scarpa 16 00161 Roma, Italy

`andreucci@dmmm.uniroma1.it`

a.a. 2008–2009

versione definitiva

corso\_edp 20081215 19.35

## Nota

Questa è la versione definitiva degli Appunti per il corso di *Equazioni alle derivate parziali*, tenuto per il Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale dell'Università La Sapienza di Roma, anno accademico 2008/2009.

**Eventuali correzioni a questa versione definitiva verranno segnalate in una Errata Corrige, che apparirà sul sito del corso.**

Il programma d'esame consiste, con riferimento al contenuto di questi Appunti, in:

- Capitolo 1 (solo la Sezione 1.2);
- Capitolo 2 (meno: la Sezione 2.4);
- Capitolo 3 (meno: la Sezione 3.9);
- Capitolo 4;
- Capitolo 5;
- Capitolo 6 (meno: la dimostrazione del Teorema 6.1, il Teorema 6.2, il Corollario 6.3);
- Capitolo 7 (meno: la Proposizione 7.13; la Sottosezione 7.3.1; i corollari 7.20, e 7.21; l'Osservazione 7.23; la dimostrazione del Teorema 7.26; la Sezione 7.9);
- Capitolo 8 (meno: le Sezioni 8.1 e 8.2, e la dimostrazione del Teorema 8.8);
- Capitolo 9 (meno: i teoremi 9.3, 9.5; la Sezione 9.3);
- Capitolo 10 (meno: Proposizione 10.3);
- Capitolo 11 (meno: il Teorema 11.4; il Corollario 11.5; le Sottosezioni 11.2.1, 11.3.1, 11.3.2; la dimostrazione della Proposizione 11.24; la Proposizione 11.25; la Sezione 11.5; la Sezione 11.6);
- Capitolo 12 (meno: la dimostrazione del Teorema 12.3);
- Capitolo 13;
- Capitolo 14 (meno: la (14.7); la Sezione 14.4);
- Capitolo 15 (meno: le (15.5) e (15.7)).

Si noti che il contenuto delle Appendici viene usato nel testo.

# Indice

Nota	iii
<b>Parte 1. Equazioni del primo ordine</b>	<b>1</b>
Capitolo 1. Introduzione	3
1.1. Un esempio: L'equazione di continuità	3
1.2. Caso della simmetria piana: Il metodo delle caratteristiche	4
1.3. Altre geometrie: Condizioni al bordo	6
Capitolo 2. Equazioni a derivate parziali del primo ordine	11
2.1. Equazioni semilineari	11
2.2. Curve caratteristiche e caratteristiche al suolo	11
2.3. Esistenza e unicità di soluzioni	13
2.4. Equazioni quasilineari	16
<b>Parte 2. Problemi al contorno per equazioni del secondo ordine</b>	<b>19</b>
Capitolo 3. Problemi per equazioni del secondo ordine	21
3.1. Il problema di Cauchy	21
3.2. Problemi al contorno	22
3.3. Problemi al contorno per l'equazione di Laplace	23
3.4. Problemi al valore iniziale e al contorno per l'equazione del calore	24
3.5. Problemi ai valori iniziali e al contorno per l'equazione delle onde	25
3.6. Problemi in domini illimitati	25
3.7. Il problema di Cauchy in tutto lo spazio	26
3.8. Dipendenza continua dai dati.	26
3.9. Condizioni di compatibilità	27
Capitolo 4. Soluzioni: casi particolari	29
4.1. Soluzione per separazione delle variabili	29
4.2. Passaggio a coordinate polari	31
Capitolo 5. Principi di massimo	35
5.1. Principio di massimo per l'equazione di Laplace	35
5.2. Applicazioni al problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace	35
5.3. Principio di massimo per l'equazione del calore	36
5.4. Applicazioni al problema di Dirichlet per l'equazione del calore	37
5.5. Il lemma di Hopf per l'equazione di Laplace	39
5.6. Il lemma di Hopf per l'equazione del calore	39

<b>Parte 3. Metodo di Fourier</b>	<b>41</b>
Capitolo 6. Stime dell'energia	43
6.1. Equazione delle onde	43
6.2. Equazione del calore	46
6.3. Equazione di Laplace	49
Capitolo 7. Serie di Fourier	51
7.1. Prodotto scalare di funzioni	51
7.2. Funzioni ortogonali. Sistemi ortonormali	53
7.3. Approssimazione di funzioni con sistemi ortonormali	55
7.4. Sistemi ortonormali completi	56
7.5. Serie di Fourier in $(-\pi, \pi)$	58
7.6. Serie di soli seni o soli coseni	59
7.7. Altri intervalli	61
7.8. Espansioni in serie di Fourier di funzioni di più variabili	62
7.9. Serie di Fourier in forma complessa	63
Capitolo 8. Convergenza delle serie di Fourier	65
8.1. Le somme di Fejer	65
8.2. Completezza del sistema di Fourier	67
8.3. Sviluppi di funzioni regolari	68
8.4. Il fenomeno di Gibbs	70
Capitolo 9. Il metodo di Fourier	73
9.1. Il metodo di Fourier: soluzione per serie	73
9.2. Il caso non omogeneo	75
9.3. L'equazione di Laplace in coordinate polari	80
<b>Parte 4. Formule di rappresentazione</b>	<b>85</b>
Capitolo 10. L'equazione delle onde	87
10.1. L'equazione delle onde o della corda vibrante	87
10.2. Il problema ai valori iniziali per la corda infinita	88
10.3. Dipendenza continua dai dati.	89
10.4. Soluzioni deboli	90
10.5. Alcuni problemi per altri domini: tecniche di riflessione	91
Capitolo 11. Integrazione per convoluzione	93
11.1. Convoluzioni	93
11.2. Equazione di Laplace nel semipiano	98
11.3. Equazione del calore nel semipiano	100
11.4. Proprietà qualitative di soluzioni dell'equazione del calore	104
11.5. Equazione di Laplace nel cerchio	106
11.6. Polinomi di Stieltjes	110
Capitolo 12. Equazioni non omogenee	113
12.1. Il principio di Duhamel	113
12.2. Equazione delle onde	113
12.3. Equazione del calore	115

<b>Parte 5. Studio del comportamento delle soluzioni</b>	<b>121</b>
Capitolo 13. Comportamenti asintotici	123
13.1. Problema della lunghezza critica	123
<b>Parte 6. Trasformate di funzioni</b>	<b>125</b>
Capitolo 14. La trasformata di Fourier	127
14.1. Definizione	127
14.2. Proprietà elementari della trasformata di Fourier	127
14.3. Applicazione per la risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore	129
14.4. Applicazione per la risoluzione del problema nel semipiano per l'equazione di Laplace	130
Capitolo 15. La trasformata di Laplace	133
15.1. Definizione	133
15.2. Proprietà elementari della trasformata di Laplace	133
15.3. Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie	135
<b>Parte 7. Complementi</b>	<b>137</b>
Capitolo 16. Sistemi ortonormali completi ed equazioni differenziali	139
16.1. Operatori definiti da equazioni differenziali	139
16.2. Altre proprietà di $\mathcal{L}$	141
16.3. Autovalori di $\mathcal{L}$ e proprietà di massimo	143
16.4. Autovalori di $\mathcal{L}$ e del problema ai limiti	145
16.5. Esistenza dei punti di massimo per $\mathcal{L}$ . L'idea di Ascoli e Arzelà	147
Capitolo 17. Classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine	153
17.1. Equazioni a coefficienti costanti in due variabili	153
17.2. Forme quadratiche ed equazioni del secondo ordine	155
17.3. Equazioni a coefficienti non costanti	156
Capitolo 18. Soluzioni deboli di equazioni a derivate parziali del secondo ordine	157
18.1. Il principio di Dirichlet	157
18.2. Soluzioni deboli	158
18.3. Ricerca di minimi per $J_1$	160
18.4. Soluzioni deboli di equazioni non regolari	161
18.5. Un caso concreto di ricerca di soluzioni deboli	164
18.6. Il metodo di Galerkin	169
<b>Parte 8. Appendici</b>	<b>171</b>
Appendice A. Integrazione di funzioni non continue	173
A.1. Insiemi di misura (di Lebesgue) nulla	173
A.2. Funzioni integrabili	174
A.3. Lo spazio $L^2(E)$	179
Appendice B. Cambiamenti di coordinate	181

B.1. Coordinate cilindriche	181
B.2. Coordinate sferiche	183
Appendice C. Richiami e definizioni	187
C.1. Funzioni	187
C.2. Insiemi	187
C.3. Identità trigonometriche	187
C.4. Disuguaglianze	188
C.5. Riflessioni	189
C.6. Integrali	191
Appendice D. Simboli usati nel testo	193

Parte 1

Equazioni del primo ordine



## Introduzione

### 1.1. Un esempio: L'equazione di continuità

Consideriamo una regione  $G \subset \mathbf{R}^3$  occupata da un gas, di densità  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , ove  $\mathbf{x} \in G$  rappresenta un punto variabile in  $G$ , e  $t$  il tempo. Per definizione di densità, dato un qualunque  $\Omega \subset G$ , e un qualunque istante  $t$ , la massa totale di gas contenuto in  $\Omega$  all'istante  $t$  è pari a

$$m(\Omega, t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}. \quad (1.1)$$

Assumiamo qui che  $\rho$  sia una funzione non negativa, regolare quanto basta. Fissiamo  $\Omega$  come sopra, ad arbitrio. Allora, se assumiamo, come facciamo, che non siano presenti né sorgenti né assorbitori di gas (cioè che questo non venga né prodotto né distrutto), l'eventuale variazione di  $m(\Omega, t)$  tra  $t = t_1$  e  $t = t_2$  è dovuta solo agli scambi attraverso la frontiera  $\partial\Omega$ , ossia al flusso (entrante o uscente) di gas attraverso  $\partial\Omega$ . Facciamo l'ipotesi che

$$\text{flusso del gas in } (\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1.2)$$

ove  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  è il campo di velocità del gas. Dunque si ha per quanto sopra, e denotando con  $\boldsymbol{\nu}$  la normale esterna a  $\partial\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t_2) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t_1) \, d\mathbf{x} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \, dt. \quad (1.3)$$

Quindi la funzione integrata in  $t$  nel membro di destra deve essere la derivata rispetto al tempo del membro di sinistra, ossia

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \\ &= - \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

si è usato il teorema della divergenza. Si noti che “div”, qui e sempre anche nel seguito, indica l'operatore di divergenza *nelle sole variabili spaziali* (e non in  $t$ ). Poiché  $\Omega$  è scelto ad arbitrio in  $G$ , e le funzioni integrande in (1.4) si assumono regolari, deve valere l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, t > t_0. \quad (1.5)$$

Qui  $t_0$  è un istante iniziale, a partire dal quale consideriamo il fenomeno della diffusione del gas; di solito sceglieremo la scala dei tempi in modo che  $t_0 = 0$ .

La (1.5) è un'equazione a derivate parziali (e.d.p.); infatti in essa compaiono derivate di funzioni dipendenti da più variabili. Le incognite, a rigore, in (1.5) sono due:  $\rho$  e  $\mathbf{v}$ . Perciò non è in genere possibile determinare sia  $\rho$  che  $\mathbf{v}$  a partire dalla sola (1.5).

## 1.2. Caso della simmetria piana: Il metodo delle caratteristiche

Nel seguito faremo l'ipotesi che sia  $\rho$  che  $\mathbf{v}$  dipendano da  $\mathbf{x}$  solo attraverso la prima coordinata  $x$ ; questo si dice caso *monodimensionale*. Questa denominazione è dovuta al fatto che l'equazione (1.5) si riduce nelle presenti ipotesi a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_1) = 0; \quad (1.6)$$

nella (1.6) è presente una sola coordinata scalare *spaziale*, la  $x$ . Le funzioni  $\rho$  e  $v_1$  sono costanti in ciascun piano ortogonale all'asse  $x$ , nel senso che

$$\rho(x, y_1, z_1, t) = \rho(x, y_2, z_2, t), \quad \text{per ogni coppia di punti } (y_i, z_i).$$

Pertanto questo si dice anche caso della *simmetria piana*. Le funzioni  $\rho$  e  $v_1$  si possono considerare come definite su una regione del piano  $(x, t)$  (invece che su una regione di  $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ ).

Fermo restando che, in genere, la (1.6) andrebbe accompagnata con un'altra equazione, supponiamo qui invece che  $v_1$  sia già nota per altre considerazioni. Per esempio assumiamo

$$v_1 \equiv v, \quad \text{con } v \text{ costante.} \quad (1.7)$$

Allora la (1.6) assume la forma

$$\rho_t + v\rho_x = 0, \quad (1.8)$$

in un qualche aperto  $Q$  del piano  $(x, t)$  che per ora non specifichiamo. Facciamo ora l'osservazione essenziale che

$$\rho_t + v\rho_x = \frac{d}{dt}[\rho(x_0 + vt, t)], \quad \text{se } (x_0 + vt, t) \in Q. \quad (1.9)$$

In altre parole il termine di sinistra della (1.8) esprime la derivata (nel parametro  $t$ ) lungo le rette

$$\begin{cases} x = x_0 + vt, \\ t = t, \end{cases} \quad (1.10)$$

del piano  $(x, t)$ , che si dicono anche *rette caratteristiche*. Quest'osservazione permette di integrare l'equazione differenziale. Infatti, da (1.8), (1.9), segue che

$$\rho(x_0 + vt, t) = \rho(x_0, 0), \quad (1.11)$$

per ogni  $t \geq 0$  e per ogni  $x_0$  tali che il segmento della retta (1.10) di estremi  $(x_0, 0)$  e  $(x_0 + vt, t)$  giaccia in  $Q$ .

**1.2.1. Condizioni iniziali.** Cerchiamo ora di applicare la formula (1.11) all'effettiva risoluzione di un problema posto per l'equazione (1.8). Per semplicità iniziamo a considerare il caso in cui

$$Q = (-\infty, \infty) \times (0, \infty) = \{(x, t) \mid t > 0\}. \quad (1.12)$$

Questo è il caso in cui il gas riempie tutto lo spazio  $\mathbf{R}^3$ ; si noti come il dominio rappresentativo (il dominio di definizione di  $\rho(\cdot, t)$ ) abbia dimensione più bassa in virtù della simmetria assunta sopra.

Da un punto di vista fisico, è ragionevole assegnare in un problema come questo la densità del gas in ogni punto dello spazio all'istante iniziale, ossia supporre che

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.13)$$

con  $\rho_0$  funzione data;  $\rho_0$  si chiama appunto *dato iniziale*.

Il problema consiste nel determinare  $\rho(x, t)$  in un generico punto  $(x, t) \in Q$ . Denotiamo per il momento un fissato  $(x, t)$  con  $(\bar{x}, \bar{t})$ , per chiarezza. Le (1.11) e (1.13), forniscono subito la soluzione, una volta che si è determinato  $x_0 = x_0(\bar{x}, \bar{t})$  in modo che

$$x_0 + v\bar{t} = \bar{x}, \quad \text{ossia} \quad x_0 = \bar{x} - v\bar{t}. \quad (1.14)$$

Per questa scelta di  $x_0$  la (1.11) diviene

$$\rho(\bar{x}, \bar{t}) = \rho(\bar{x} - v\bar{t}, 0).$$

Tornando alle variabili  $(x, t)$ , e invocando anche (1.13), si ottiene

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - vt), \quad (x, t) \in Q. \quad (1.15)$$

La (1.15) fornisce una rappresentazione esplicita della soluzione, ma alcune precisazioni sono necessarie. I calcoli precedenti sono validi se  $\rho$  è abbastanza regolare, per esempio  $\rho \in C^1(Q) \cap C(\bar{Q})$  (altrimenti (1.9) in genere non vale). La (1.15) però dà una  $\rho$  in tale classe di regolarità se e solo se  $\rho_0 \in C^1(\mathbf{R})$ .

Supponiamo dunque  $\rho_0 \in C^1(\mathbf{R})$ . Allora, sostituendo la  $\rho$  data da (1.15) nel problema si vede che in effetti essa ne è soluzione. Di più, qualunque altra soluzione nella classe  $C^1(Q) \cap C(\bar{Q})$  deve essere data dalla (1.15), e dunque la soluzione è unica. Abbiamo dimostrato un teorema di esistenza e unicità di soluzioni.

Nel caso, invece, in cui  $\rho_0 \notin C^1(\mathbf{R})$ , il procedimento seguito mostra che

- se esiste una soluzione  $\rho \in C^1(Q) \cap C(\bar{Q})$ , allora essa è data di necessità dalla (1.15);
- tuttavia, la funzione  $\rho$  definita dalla (1.15) non è in  $C^1(Q)$ , e dunque non esiste una soluzione  $\rho \in C^1(Q) \cap C(\bar{Q})$  del nostro problema.

Si noti che perfino in questo caso si può pensare di definire una soluzione  $\rho$ ; dobbiamo certo rinunciare alla richiesta  $\rho \in C^1(Q)$ . L'idea di definire "soluzioni" che siano meno regolari di quello che l'equazione differenziale indicherebbe, ossia che non abbiano le derivate che appaiono nell'equazione, è tradizionale nella teoria delle e.d.p., e vi accenneremo nel caso delle equazioni del secondo ordine (vedi il Capitolo 18, e la Sezione 10.4).

**1.2.2. Caso  $v = v(t)$ .** Consideriamo il caso in cui  $v$  sia una funzione nota del tempo, ossia la (1.7) venga sostituita da

$$v_1(x, t) = v(t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1.16)$$

ove  $Q$  è come sopra. In questo caso

$$\rho_t + v(t)\rho_x = \frac{d}{dt} \left[ \rho \left( x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau, t \right) \right],$$

e la  $\rho$  risulta costante lungo le curve

$$\begin{cases} x = x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau, \\ t = t, \end{cases}$$

che prendono il posto delle rette (1.10). Ragionando come sopra, si vede che la soluzione di (1.6), (1.13) è in questo caso

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left( x - \int_0^t v(\tau) d\tau \right), \quad (x, t) \in Q.$$

### 1.3. Altre geometrie: Condizioni al bordo

**1.3.1. Caso del semispazio.** Supponiamo che il gas, invece di riempire tutto lo spazio, riempi solo il semispazio  $x > 0$ . Allora il dominio di definizione di  $\rho$ , ossia la regione in cui dobbiamo cercare di risolvere l'e.d.p. (1.6), è

$$Q^+ = (0, \infty) \times (0, \infty) = \{(x, t) \mid x > 0, t > 0\}.$$

Supponiamo ancora che  $v_1$  sia *costante e positiva*, cioè che valga (1.7), con  $v > 0$ . Le considerazioni svolte in (1.8)–(1.11) si mantengono valide. Tuttavia, se cerchiamo di procedere come sopra, per ricavare la rappresentazione di  $\rho$  in funzione del dato iniziale  $\rho_0$ , incontriamo una differenza sostanziale con il caso precedente. Anzitutto, il dato iniziale ora sarà prescritto solo per  $x \geq 0$ :

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad x \geq 0. \quad (1.17)$$

Inoltre, fissato  $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q^+$ , e procedendo come sopra, otteniamo ancora un  $x_0$  come in (1.14). Ma tale  $x_0(\bar{x}, \bar{t})$  appartiene al dominio di  $\rho_0$ , vale a dire si ha  $x_0 \geq 0$ , solo se  $\bar{x} \geq v\bar{t}$ . Nella regione di  $Q^+$  a sinistra della retta  $x = vt$ , perciò, questo metodo sembra fallire: non si riesce a trovare un punto sulla retta della famiglia (1.10) che passa per  $(\bar{x}, \bar{t})$ , ove la  $\rho$  sia nota, cioè ove sia assegnato il dato iniziale. Tale retta infatti interseca l'asse  $t = 0$  in  $x < 0$ . È chiaro che questa difficoltà scompare se assegnamo anche il dato *al bordo* su  $x = 0$ ,

$$\rho(0, t) = \rho_1(t), \quad t \geq 0. \quad (1.18)$$

Infatti, per  $\bar{x} < v\bar{t}$  cercheremo l'intersezione della retta caratteristica per  $(\bar{x}, \bar{t})$  con  $x = 0$ , invece che con  $t = 0$ , ossia cercheremo il  $t$  tale che

$$0 = x_0 + vt = \bar{x} - v\bar{t} + vt \quad \text{ossia} \quad t = \bar{t} - \frac{\bar{x}}{v}.$$

Riassumendo, la  $\rho$  risulta data, per  $(x, t) \in Q^+$ , da

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_0(x - vt), & \text{se } x \geq vt; \\ \rho_1(t - \frac{x}{v}), & \text{se } x < vt. \end{cases} \quad (1.19)$$

La  $\rho$  è continua se e solo se  $\rho_0(0) = \rho_1(0)$ .

1.3.1.1. *Il caso con  $v < 0$ .* Consideriamo in breve anche il caso in cui il problema sia posto in  $Q^+$ , ma si abbia  $v_1$  costante e negativa, ossia  $v < 0$ . Si vede subito allora che il numero  $x_0$  definito da (1.14) risulta sempre positivo, per ogni  $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q^+$ . È chiaro che questo è dovuto al fatto che la pendenza delle rette caratteristiche è ora opposta a quella del caso con  $v > 0$ . Quindi se  $v < 0$  la soluzione è

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - vt), \quad (x, t) \in Q^+. \quad (1.20)$$

Osserviamo che:

- 1) la formula (1.20) in effetti definisce la  $\rho$  addirittura per  $vt < x < 0$ , e non solo in  $Q^+$ ; anche qui la  $\rho$  risolve la (1.6). Si dice a volte che equazioni come la (1.6) ‘si risolvono per caratteristiche’, ossia la soluzione si trova in tutta la regione coperta dalle caratteristiche che escono da una curva ove la soluzione sia assegnata. Per coprire tutto  $Q^+$  nel caso  $v > 0$  è necessario assegnare  $\rho$  anche su  $x = 0$ , mentre questo non è richiesto nel caso  $v < 0$ .
- 2) Di più, non è possibile assegnare un dato qualunque su  $x = 0$ , nel caso  $v < 0$ , perchè vale  $\rho(0, t) = \rho_0(-vt)$ . In altri termini, il dato deve essere assegnato su una curva che interseca una sola volta ciascuna caratteristica, per evitare contraddizioni.
- 3) Dal punto di vista fisico, supporre  $v$  costante significa che il gas sta muovendosi di moto traslatorio. Quindi se il moto avviene verso destra ( $v > 0$ ), dobbiamo sapere con quale densità il gas entra nel dominio  $Q^+$  attraverso la frontiera  $x = 0$ , se vogliamo risolvere il problema. Se il moto avviene verso sinistra ( $v < 0$ ) il gas esce attraverso  $x = 0$  (ove viene ‘abbandonato’ dal nostro modello), e non occorre prescrivere alcun dato su tale frontiera, ove la densità si ricava invece dal dato iniziale e dall’ipotesi di moto traslatorio.

Da un punto di vista più generale, le considerazioni precedenti mostrano che, risolvendo una e.d.p. in un dominio assegnato, la parte della frontiera del dominio su cui si deve (o si può) assegnare un dato, dipende dalla forma dell’equazione medesima.

**1.3.2. Caso della simmetria cilindrica.** Torniamo alla (1.5), ove supponiamo che, con la notazione dell’Appendice B, Sezione B.1,

$$\rho = \rho(r, t), \quad \mathbf{v} = v^r(r, t)\mathbf{u}_1.$$

Ricordando l’espressione della divergenza in coordinate cilindriche ottenuta nell’Appendice B, si ha da (1.5),

$$\rho_t + \frac{1}{r}(r\rho v^r)_r = 0, \quad r > 0. \quad (1.21)$$

Supponiamo anche che  $v^r$  sia una costante assegnata. Mostriamo come questa ipotesi, in apparenza simile a quella  $v =$  costante pattuita nel caso

della simmetria piana, conduce in realtà a una soluzione molto diversa; questo è dovuto al differente significato geometrico della coordinata  $r$  rispetto alla  $x$ .

La (1.21) equazione diviene, esplicitando la derivata in  $r$ ,

$$\rho_t + v^r \rho_r = -\frac{v^r}{r} \rho, \quad r > 0. \quad (1.22)$$

Si noti che, nonostante il gas occupi tutto  $\mathbf{R}^3$ , per motivi geometrici vale comunque  $r \geq 0$ . Dunque la e.d.p. si può considerare posta in un quadrante del piano  $(r, t)$ , che continuiamo a denotare

$$Q^+ = (0, \infty) \times (0, \infty) = \{(r, t) \mid r > 0, t > 0\}.$$

Ponendo  $R(t) = \rho(r_0 + v^r t, t)$ , e prendendo  $r = r_0 + v^r t$ , la (1.22) si riscrive come

$$\dot{R}(t) = -\frac{v^r}{r_0 + v^r t} R(t), \quad (1.23)$$

che si integra per esempio separando le variabili. Oppure, si può riscrivere la (1.21), con la sostituzione di variabile  $u = r\rho$ ,

$$u_t + v^r u_r = 0,$$

che si integra come (1.8). In ogni modo, si perviene alla soluzione

$$\rho(r, t) = \rho_0(r - v^r t) \frac{r - v^r t}{r}, \quad r \geq v^r t, \quad (1.24)$$

ove abbiamo già usato il dato iniziale

$$\rho(r, 0) = \rho_0(r), \quad r \geq 0. \quad (1.25)$$

Dunque, valgono considerazioni analoghe a quelle svolte nella sottosezione 1.3.1.

In particolare se  $v^r > 0$ , il dato in (1.25) è insufficiente a determinare la soluzione su tutto  $Q^+$ . Tuttavia, dal punto di vista fisico,  $r = 0$  non sembra costituire in questo caso una vera frontiera del dominio, su cui prescrivere un dato che non sia quello naturale  $\rho_r(0, t) = 0$  (vedi Lemma B.1). Osserviamo allora che, supponendo, come è accettabile, che anche  $\rho_t$  resti limitato per  $r \rightarrow 0$ , moltiplicando la (1.22) per  $r$  e mandando  $r \rightarrow 0$ , si ricava  $\rho(0, t) = 0$ . Dunque la  $\rho$ , ragionando come nella sottosezione 1.3.1 risulta definita da

$$\rho(r, t) = \begin{cases} \rho_0(r - v^r t) \frac{r - v^r t}{r}, & \text{se } r \geq v^r t; \\ 0, & \text{se } r < v^r t. \end{cases} \quad (1.26)$$

Si noti che, per  $t > 0$ ,  $\rho$  è continua perfino se  $\rho_0(0) \neq 0$ .

Per commentare la (1.26) conviene supporre per semplicità  $\rho_0 = \text{costante}$  positiva. Iniziamo con l'osservare che il gas che è, al tempo  $t = \bar{t}$ , sulla superficie cilindrica  $\{r = \bar{r}, -1 < z < 1\}$  (l'altezza del cilindro può essere scelta a piacere, visto che  $\rho$  non dipende da  $z$ ), si trovava, al tempo  $t = 0$ , sulla superficie cilindrica  $\{r = \bar{r} - v^r \bar{t}, -1 < z < 1\}$ . Dato che la stessa quantità di gas si trova, al tempo  $\bar{t}$ , distribuita su una superficie di area maggiore di un fattore  $\bar{r}/(\bar{r} - v^r \bar{t})$  di quella su cui era al tempo  $t = 0$ , la densità  $\rho$  deve essere diminuita dello stesso fattore. Infatti questo è proprio il significato della (1.26), almeno se  $r > v^r t$ . Se  $r < v^r t$ , la superficie cilindrica a distanza  $r$  dall'asse  $z$ , al tempo  $t$ , è stata già sorpassata dal gas

che occupava la zona adiacente all'asse  $z$  al tempo iniziale. Quindi la densità è nulla (il gas si trova ormai tutto a distanza maggiore di  $r$  dall'asse  $z$ ).

**1.3.3. Moto a densità costante.** Il moto studiato nella sottosezione precedente può apparire poco realistico, e in effetti ricordiamo che abbiamo imposto ad arbitrio che il campo delle velocità radiali fosse costante. Studiamo cosa avviene nel caso in cui si impone che  $\rho$  si mantenga costante (in  $\mathbf{x}$  e in  $t$ ). La (1.5) continua a valere, ma ora per l'ipotesi che  $\rho$  sia costante, essa equivale a

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.27)$$

Questa equazione prescinde da qualsiasi ipotesi di simmetria, ma supponiamo ora che  $\mathbf{v} = v^r(r, t)\mathbf{u}_1$ , ossia di essere in condizioni di simmetria cilindrica, come sopra. Allora (1.27) diviene

$$\frac{1}{r}(rv^r)_r = 0, \quad r > 0. \quad (1.28)$$

La (1.28) si integra subito tra due qualunque valori  $r$  e  $r_1$  della coordinata radiale, ottenendo

$$v^r(r, t) = \frac{r_1}{r}v^r(r_1, t) = \frac{1}{r}v^r(1, t), \quad r > 0, \quad (1.29)$$

ove la seconda uguaglianza si ottiene ponendo  $r_1 = 1$ .

Il campo di velocità diventa singolare per  $r \rightarrow 0$  (a meno che non sia ovunque nullo), il che prova che non esistono soluzioni non nulle di (1.27) definite in tutto lo spazio e a simmetria cilindrica.



## CAPITOLO 2

# Equazioni a derivate parziali del primo ordine

### 2.1. Equazioni semilineari

Un'e.d.p. *semilineare* del primo ordine è

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c(x, y, u), \quad (2.1)$$

ove le ipotesi di regolarità su  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $u$  saranno specificate sotto. Se  $c = c_1(x, y)u + c_2(x, y)$ , l'equazione si dice *lineare* e assume la forma

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = c_1(x, y)u + c_2(x, y). \quad (2.2)$$

Se  $c_2 \equiv 0$ , e  $u_1$ ,  $u_2$  sono soluzioni, anche  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$  è soluzione, per ogni  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ .

DEFINIZIONE 2.1. *Problema di Cauchy*  $\mathcal{PC}$  per (2.1):

Assegnati:

- una curva  $\gamma \subset \mathbf{R}^2$  regolare semplice, e una sua parametrizzazione regolare  $\Psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s))$ ,  $s \in I$  intervallo aperto;
- un dato  $u_0 : I \rightarrow \mathbf{R}$ ;

trovare un aperto  $Q$  di  $\mathbf{R}^2$  che contenga  $\gamma$ , e una  $u \in C^1(Q)$ , tale che

$$au_x + bu_y = c, \quad \text{in } Q, \quad (2.3)$$

$$u = u_0, \quad \text{su } \gamma. \quad (2.4)$$

La  $\gamma$  si dice *curva che porta il dato*, e  $u_0$  si dice *dato di Cauchy*.  $\square$

La (2.3) va intesa nel senso che

$$a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) = c(x, y, u(x, y)), \quad \text{per ogni } (x, y) \in Q.$$

La (2.4) va intesa nel senso che

$$u(\Psi(s)) = u_0(s), \quad \text{per ogni } s \in I. \quad (2.5)$$

Si noti che la (2.5), e la richiesta che  $u \in C^1(Q)$ , implicano che  $u_0$  debba essere in  $C^1(I)$ .

### 2.2. Curve caratteristiche e caratteristiche al suolo

Le curve  $\Phi(\tau) = (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau))$ , soluzioni su qualche intervallo aperto  $J \subset \mathbf{R}$  di

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= b(x, y), \\ \frac{dz}{d\tau} &= c(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.6)$$

si dicono *caratteristiche* di (2.1). Queste sono curve in  $\mathbf{R}^3$ .

Le curve in  $\mathbf{R}^2$  date da  $\Phi_0(\tau) = (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))$ , che risultano proiezioni sul piano  $(x, y)$  delle curve caratteristiche, si dicono *caratteristiche al suolo*. Si noti che  $(\varphi_1, \varphi_2)$  è soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= b(x, y), \end{aligned} \quad (2.7)$$

e si può determinare in modo indipendente da  $\varphi_3$ .

**2.2.1. Risoluzione per caratteristiche.** Vale, con l'intesa che tutte le funzioni sono calcolate in  $x = \varphi_1(\tau)$ ,  $y = \varphi_2(\tau)$ ,  $u = u(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))$ ,

$$c = au_x + bu_y = \frac{d\varphi_1}{d\tau}u_x + \frac{d\varphi_2}{d\tau}u_y = \frac{d}{d\tau}u(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)), \quad (2.8)$$

ove solo per la prima uguaglianza abbiamo fatto uso di (2.1). Dunque la e.d.p. si riduce a una e.d.o. lungo le caratteristiche al suolo. In linea di principio, il problema di Cauchy  $\mathcal{PC}$  si può risolvere così:

- 1) Consideriamo per  $s \in I$ , la caratteristica al suolo che passa per il punto  $\Psi(s)$  in  $\tau = 0$ .
- 2) Risolviamo il problema di Cauchy per la e.d.o. in (2.8), con il dato iniziale  $u_0(s)$ , prescritto all'istante iniziale  $\tau = 0$ . Questo determina il valore di  $u$  lungo una parte della caratteristica al suolo scelta nel passo 1), e in un certo senso risolve il problema.

In effetti però, a noi interessa ottenere  $u$  come funzione di  $(x, y)$  e non di  $(\tau, s)$ . Allora si può proseguire così:

- 3) [supplemento di 1)] Si fissa  $(x, y)$ ; chiamiamo questo punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  per chiarezza. Si trova la coordinata  $\bar{s}$ , tale che  $(\bar{x}, \bar{y})$  appartenga alla caratteristica al suolo per  $\Psi(\bar{s})$  tra quelle costruite al punto 1). Sia  $\bar{\tau}$  il valore del parametro su tale caratteristica corrispondente al punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Si noti che sia  $\bar{s}$  che  $\bar{\tau}$  sono funzioni di  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{s} = \bar{s}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y})$ .
- 4) [supplemento di 2)] Sostituendo  $\bar{s} = \bar{s}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{x}, \bar{y})$  nella soluzione del problema di Cauchy per la e.d.o. trovata nel punto 2), si ottiene la soluzione  $u(\bar{x}, \bar{y})$ ; di solito, si cambia il nome di variabile, da  $(\bar{x}, \bar{y})$  a  $(x, y)$ , per ottenere la  $u$  calcolata nel generico punto  $(x, y)$ .

**2.2.2. Esempio.** Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} u_x + 2u_y &= u, & \text{in } \mathbf{R}^2, \\ u(s, -s) &= s^2, & 0 < s < \infty. \end{aligned}$$

Dunque

$$\gamma = \{y + x = 0, x > 0\}; \quad \psi_1(s) = s, \quad \psi_2(s) = -s; \quad u_0(s) = s^2,$$

per  $0 < s < \infty$ .

1) Fissiamo  $s > 0$ . Calcoliamo la caratteristica al suolo per  $(\psi_1(s), \psi_2(s))$ . Questa è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\tau} &= 1, \\ \frac{d\varphi_2}{d\tau} &= 2, \end{aligned} \quad (\varphi_1(0), \varphi_2(0)) = (s, -s),$$

ossia (la retta)

$$(\varphi_1, \varphi_2)(\tau) = (s + \tau, -s + 2\tau), \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

2) Dobbiamo ora risolvere sulla caratteristica al suolo trovata nel punto 1) il problema di Cauchy per  $U(\tau) = u(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))$

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= U, \quad (\text{dalla e.d.p.}) \\ U(0) &= s^2. \quad (\text{dal dato di Cauchy}) \end{aligned}$$

Si ottiene

$$U(\tau) = U(0)e^\tau = s^2e^\tau, \quad -\infty < \tau < \infty.$$

3) Dobbiamo passare dalle variabili  $(s, \tau)$  alle variabili  $(x, y)$ . Fissiamo  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbf{R}^2$ , e cerchiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \bar{s} + \bar{\tau} &= \bar{x}, \\ -\bar{s} + 2\bar{\tau} &= \bar{y}. \end{aligned}$$

Le soluzioni ammissibili devono soddisfare  $\bar{s} > 0$ , perché la restrizione  $s > 0$  è stata imposta nella definizione del problema. Non si sono invece trovate restrizioni su  $\tau$ . Si ottiene

$$\bar{s} = \frac{2\bar{x} - \bar{y}}{3}, \quad \bar{\tau} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{3},$$

ammissibile in

$$\Omega = \{(\bar{x}, \bar{y}) \mid 2\bar{x} - \bar{y} > 0\}.$$

4) Infine operiamo la sostituzione di variabili nella  $U(\bar{\tau})$ , ottenendo

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{s}^2 e^{\bar{\tau}} = \frac{1}{9} (2\bar{x} - \bar{y})^2 e^{\frac{1}{3}(\bar{x} + \bar{y})},$$

o, tornando alle variabili  $x$  e  $y$ ,

$$u(x, y) = \frac{1}{9} (2x - y)^2 e^{\frac{1}{3}(x+y)}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

### 2.3. Esistenza e unicità di soluzioni

Sopra si è proceduto in modo formale; per esempio non è detto a priori che il sistema differenziale che definisce le curve caratteristiche abbia soluzioni. Supponiamo allora che  $a, b, c \in C^1(Q_1)$ , con  $Q_1$  aperto di  $\mathbf{R}^3$ ; una soluzione  $u$  come in Definizione 2.1 risulterà allora definita in un aperto  $Q$  incluso nella proiezione di  $Q_1$  sul piano  $(x, y)$ .

**TEOREMA 2.2.** *Siano  $a, b, c \in C^1(Q_1)$ , e sia  $(\bar{x}, \bar{y})$  contenuto nella proiezione di  $Q_1$  sul piano  $(x, y)$ . Siano  $u$  e  $v$  due soluzioni dell'equazione (2.1) definite in un aperto  $A$  che contiene  $(\bar{x}, \bar{y})$ , tali che  $u(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x}, \bar{y})$ . Sia  $\mathcal{C}$  una caratteristica al suolo per  $(\bar{x}, \bar{y})$ , contenuta in  $A$ . Allora  $u$  e  $v$  coincidono su  $\mathcal{C}$ .*

DIMOSTRAZIONE. La curva caratteristica  $\mathcal{C}$  nell'enunciato risulta parametrizzata da  $\Phi_0(\tau) = (\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))$ ,  $\tau \in J$ , con  $J$  opportuno intervallo di  $\mathbf{R}$ , ove  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  è l'unica soluzione di

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(x, y), \\ \frac{dy}{d\tau} &= b(x, y), & (x(0), y(0), z(0)) &= (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}); \\ \frac{dz}{d\tau} &= c(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.9)$$

si è definito

$$\bar{z} = u(\bar{x}, \bar{y}) = v(\bar{x}, \bar{y}).$$

Basta dimostrare che  $\Phi(\tau)$ ,  $\tau \in J$ , giace su entrambi i grafici di  $u$  e  $v$ . Infatti allora risulterà

$$u(\Phi_0(\tau)) = \varphi_3(\tau) = v(\Phi_0(\tau)), \quad \tau \in J. \quad (2.10)$$

Definiamo la curva  $\Xi = (\varphi_1, \varphi_2, \xi)$ , ove

$$\xi(\tau) = u(\Phi_0(\tau)).$$

A causa delle prime due equazioni differenziali di (2.9), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau}(\tau) &= \frac{d\Phi_0}{d\tau}(\tau) \cdot \nabla u(\Phi_0(\tau)) = \frac{d\varphi_1}{d\tau}(\tau)u_x(\Phi_0(\tau)) + \frac{d\varphi_2}{d\tau}(\tau)u_y(\Phi_0(\tau)) \\ &= [au_x + bu_y](\Phi_0(\tau)) = c(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), u(\Phi_0(\tau))) = c(\varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \xi(\tau)), \end{aligned}$$

ove nella penultima uguaglianza si è usata l'e.d.p.. Ne segue che  $\Xi$  risolve il problema di Cauchy (2.9), e quindi, per il teorema di unicità, deve coincidere con  $\Phi$ . In particolare sono uguali le rispettive terze componenti e dunque vale la prima delle (2.10). La seconda si dimostra nello stesso modo.  $\square$

Dalla dimostrazione precedente segue subito

**COROLLARIO 2.3.** *Con la notazione e sotto le ipotesi di Teorema 2.2, si ha: se il grafico della soluzione  $u$  contiene il punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , allora contiene anche tutta la parte della caratteristica per tale punto che si proietta in  $A$ .*

In particolare si può affermare che i grafici delle soluzioni sono formati da caratteristiche; il grafico della soluzione del problema di Cauchy è formato dalle caratteristiche che escono dai punti della curva  $(\Psi(s), u_0(s))$ ,  $s \in I$ .

**TEOREMA 2.4.** *Siano  $a, b, c \in C^1(Q_1)$ , e sia  $\gamma$  una curva semplice regolare contenuta nella proiezione di  $Q_1$  su  $\mathbf{R}^2$ , con parametrizzazione  $\Psi(s) = (\psi_1(s), \psi_2(s))$ ,  $s \in I$ ,  $I$  intervallo aperto. Valga*

$$a(\Psi(s))\psi_2'(s) - b(\Psi(s))\psi_1'(s) \neq 0, \quad \text{per ogni } s \in I. \quad (2.11)$$

*Allora, per ogni dato  $u_0 \in C^1(I)$ , esiste un intorno aperto  $Q$  di  $\gamma$  ove esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy  $\mathcal{PC}$ .*

La dimostrazione del Teorema precedente viene omessa. La parte riguardante l'esistenza in sostanza si basa sulla costruzione di  $u$  mediante il processo di integrazione per caratteristiche visto più sopra. Rimarrebbero comunque due punti da chiarire in modo rigoroso: i) le caratteristiche al suolo uscenti dalla curva che porta il dato coprono in effetti un aperto del piano che

contiene la curva medesima; ii) la  $u$  risulta di classe  $C^1$  in tale aperto, nelle variabili  $(x, y)$ .

La dimostrazione dell'unicità di soluzioni si basa invece sul Teorema 2.2.

OSSERVAZIONE 2.5. La (2.11) si può anche scrivere come

$$\det \begin{pmatrix} \Phi'_0 \\ \Psi' \end{pmatrix} \neq 0, \quad (2.12)$$

lungo tutta la  $\gamma$ , che esprime in sostanza come  $\gamma$  non sia tangente a nessuna caratteristica al suolo.  $\square$

PROPOSIZIONE 2.6. *Nelle ipotesi del Teorema 2.4, le derivate prime  $u_x$ ,  $u_y$  di  $u$  sulla curva  $\gamma$  sono ottenibili come soluzioni del sistema:*

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= c, \\ \psi'_1 u_x + \psi'_2 u_y &= u'_0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ove si intende che tutte le funzioni sono calcolate su  $(s, \Psi(s))$ ,  $s \in I$ .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il sistema formato dalla e.d.p., ristretta alla  $\gamma$ , e dall'equazione ottenuta derivando in  $s$  la (2.5), ossia il sistema (2.13), che più in dettaglio si scrive

$$\begin{aligned} a(\Psi(s))u_x(\Psi(s)) + b(\Psi(s))u_y(\Psi(s)) &= c(\Psi(s), u_0(\Psi(s))), \\ \psi'_1(s)u_x(\Psi(s)) + \psi'_2(s)u_y(\Psi(s)) &= u'_0(s). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Questo è appunto un sistema lineare nelle incognite  $u_x(\Psi(s))$ ,  $u_y(\Psi(s))$ . Per ogni fissato  $s$  il determinante del sistema coincide con la quantità in (2.11), e quindi il sistema è non singolare e la soluzione esiste unica. Questo permette di ricavare le funzioni

$$u_x(\Psi(s)), \quad u_y(\Psi(s)), \quad s \in I. \quad (2.15)$$

$\square$

OSSERVAZIONE 2.7. La (2.11) consente inoltre di ricavare tutte le derivate di  $u$  sulla curva  $\gamma$ , almeno finché la regolarità dei dati e dei coefficienti lo permette. Le derivate successive si trovano in modo simile a quanto visto nella Proposizione 2.6; per esempio derivando rispetto a  $x$  l'equazione (2.1), e rispetto a  $s$  la prima delle (2.15), si ottiene

$$\begin{aligned} a(\Psi(s))u_{xx}(\Psi(s)) + b(\Psi(s))u_{xy}(\Psi(s)) &= [-a_x u_x - b_x u_y + c_x + c_u u_x], \\ \psi'_1(s)u_{xx}(\Psi(s)) + \psi'_2(s)u_{xy}(\Psi(s)) &= \frac{d}{ds} u_x(\Psi(s)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Il membro di destra della prima delle (2.16) va calcolato in  $(\Psi(s), u_0(\Psi(s)))$ , e dunque è noto per i dati del problema e per la (2.15); la stessa cosa vale per il membro di destra della seconda equazione. Dunque  $u_{xx}|_\gamma$  e  $u_{xy}|_\gamma$  possono essere ricavate dal sistema, poiché il suo determinante coincide con quello del sistema (2.14). Si noti che in (2.16) si è dovuto assumere che  $u_x(\Psi(s))$  sia derivabile in  $s$ , ossia che  $u_0$  sia derivabile due volte.  $\square$

## 2.4. Equazioni quasilineari

Un'e.d.p. del primo ordine della forma

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad (2.17)$$

si dice *quasilineare*. Il problema di Cauchy è definito in modo analogo alla Definizione 2.1. Le curve caratteristiche sono ancora definite come le soluzioni  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  del sistema di e.d.o.

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= a(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \\ \varphi_2' &= b(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \\ \varphi_3' &= c(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3). \end{aligned}$$

Le prime due equazioni (a differenza che nel caso semilineare) non costituiscono un sistema disaccoppiato dalla terza. Dunque, benché si possano, volendo, introdurre le caratteristiche al suolo come sopra, esse non risultano molto utili per le e.d.p. quasilineari. Basta osservare che, nel caso semilineare, le due caratteristiche che passano per i due punti  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1)$  e  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_2)$  hanno la stessa proiezione sul piano  $(x, y)$  (che è la caratteristica al suolo per  $(\bar{x}, \bar{y})$ ). Questo non è vero in genere nel caso quasilineare; dunque in questo caso per il punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  passa più di una caratteristica al suolo.

Resta però vero (con dimostrazione simile) il Corollario 2.3, nel senso che le curve caratteristiche che intersecano il grafico di una soluzione, vi giacciono sopra. In altri termini, i grafici di soluzioni sono composti di curve caratteristiche.

Il metodo delle caratteristiche comunque può essere usato anche nel caso quasilineare, in ipotesi di regolarità  $C^1$  per  $a, b, c$ , e se vale la condizione

$$a(\Psi(s), u_0(s))\psi_2'(s) - b(\Psi(s), u_0(s))\psi_1'(s) \neq 0, \quad \text{per ogni } s \in I. \quad (2.18)$$

In sostanza vanno eseguiti i seguenti passi:

A) (sostituisce i passi 1) e 2) della Sottosezione 2.2.1) Fissato  $s \in I$  si trova l'unica caratteristica  $\Phi(\tau)$  tale che abbia come punto iniziale  $\Phi(0) = (\Psi(s), u_0(s))$ .

B) (sostituisce i passi 3) e 4) della Sottosezione 2.2.1) Dobbiamo imporre che la caratteristica trovata nel passo A) passi per un punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ; sia  $s = \bar{s}$  il valore del parametro corrispondente a questa intersezione, e sia  $\tau = \bar{\tau}$  il valore del parametro su  $\Phi$  nello stesso punto. Si osservi che nel metodo delle caratteristiche per equazioni semilineari, è garantito che tutte le caratteristiche al suolo che originano in un intorno opportuno della  $\gamma$  incontrino  $\gamma$ . Nel caso presente, invece, le caratteristiche 'vicine' alla curva  $\gamma_1$  riempiono una regione tridimensionale, mentre noi stiamo cercando la *superficie* descritta dalle caratteristiche che si appoggiano su  $\gamma_1$ . Per essere più precisi, vogliamo risolvere nelle due incognite  $\bar{\tau}, \bar{s}$ , il sistema di tre equazioni

$$\varphi_1(\bar{\tau}; \bar{s}) = \bar{x}, \quad \varphi_2(\bar{\tau}; \bar{s}) = \bar{y}, \quad \varphi_3(\bar{\tau}; \bar{s}) = \bar{z}, \quad (2.19)$$

che non è in genere risolubile (nella (2.19) si è indicata la dipendenza della caratteristica dal punto iniziale). La condizione di risolubilità viene messa nella forma di una restrizione sul punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Se si riesce ad esplicitarla nella  $\bar{z}$ , tornando ai vecchi nomi di variabile si ha proprio la

$$z = u(x, y),$$

che è la soluzione cercata. È possibile però che la soluzione vada lasciata in forma implicita.

**ESEMPIO 2.8.** Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} u_x + uu_y &= 0, \\ u(s, 0) &= u_0(s), \quad s > 0. \end{aligned}$$

La (2.18) è soddisfatta se  $u_0 \neq 0$ .

A) La caratteristica per  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  si trova risolvendo

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 1, & \varphi_1(0) &= s, \\ \varphi_2' &= \varphi_3, & \varphi_2(0) &= 0, \\ \varphi_3' &= 0, & \varphi_3(0) &= u_0(s). \end{aligned}$$

Si ottiene

$$\varphi_1(\tau) = \tau + s, \quad \varphi_2(\tau) = \tau u_0(s), \quad \varphi_3(\tau) = u_0(s), \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

B) Si deve quindi avere, se la caratteristica passa per  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ,

$$\bar{\tau} + \bar{s} = \bar{x}, \quad \bar{y} = \bar{\tau}\bar{z}, \quad \bar{z} = u_0(\bar{s}),$$

per valori opportuni  $(\bar{\tau}, \bar{s})$ . Pertanto, se  $\bar{z} \neq 0$ ,

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}}, \quad \bar{s} = \bar{x} - \frac{\bar{y}}{\bar{z}}, \quad \bar{z} = u_0\left(\bar{x} - \frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right).$$

In genere la soluzione si trova quindi nella forma implicita

$$u(x, y) = z = u_0\left(x - \frac{y}{z}\right). \quad (2.20)$$

Se per esempio  $u_0(s) = s$ ,  $s > 0$ , allora, esplicitando  $z$  nella (2.20), si ha

$$u(x, y) = z = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4y}}{2}, \quad (x, y) \in Q,$$

ove

$$Q = \left\{ (x, y) \mid y < \frac{x^2}{4}, x > 0 \right\}.$$

□

**2.4.1. Da quasilineare a semilineare.** Si può passare da una e.d.p. quasilineare a una semilineare cambiando la variabile dipendente. Supponiamo che una soluzione  $z = u(x, y)$  di (2.17) sia definita implicitamente da

$$H(x, y, z) = C \in \mathbf{R}, \text{ ossia che } H(x, y, u(x, y)) = C \text{ per ogni } (x, y) \in Q. \quad (2.21)$$

Qui  $H$  è una funzione di classe  $C^1$ . Allora, derivando in  $x$  e in  $y$  si ha che

$$H_x + u_x H_z = 0, \quad H_y + u_y H_z = 0, \quad (x, y) \in Q. \quad (2.22)$$

Usando (2.17) e (2.22) si ottiene subito

$$aH_x + bH_y + cH_z = 0. \quad (2.23)$$

Per come l'abbiamo ricavata, la (2.23) vale quando tutte le funzioni in essa sono calcolate nell'argomento  $(x, y, u(x, y))$ , ma possiamo anche interpretarla come e.d.p. per l'incognita  $H(x, y, z)$  in qualche aperto di  $\mathbf{R}^3$  che contenga la superficie  $z = u(x, y)$ , ossia cercare  $H$  tale che

$$a(x, y, z)H_x + b(x, y, z)H_y + c(x, y, z)H_z = 0. \quad (2.24)$$

Si noti che le caratteristiche di (2.17) corrispondono alle caratteristiche al suolo di (2.24). Se viceversa una soluzione  $H$  di (2.24) è data, ragionando come sopra, si vede che le superfici  $z = u(x, y)$  definite in forma implicita da

$$H(x, y, z) = C$$

sono soluzioni di (2.17) (nei punti ove  $H_z \neq 0$ ).

Il problema di Cauchy per (2.24) si potrebbe risolvere con il metodo delle caratteristiche. Tuttavia, poiché si hanno ora tre variabili indipendenti, il dato andrebbe prescritto non su una curva, ma su una superficie.

Le informazioni fornite dal problema di Cauchy per (2.17) sono quindi insufficienti per costituire un problema di Cauchy per (2.24). Come abbiamo già notato però, allo scopo di risolvere (2.17) ci basta trovare le caratteristiche che escono dalla curva  $\gamma_1 = \{(\Psi(s), u_0(s))\}$ . Su tutte queste caratteristiche  $H$  mantiene il valore costante  $C$ . Dal punto di vista operativo questo metodo è molto simile a quello delle caratteristiche visto sopra.

OSSERVAZIONE 2.9. Se  $H$  è soluzione di (2.24), anche  $f(H)$  lo è, per ogni  $f$  di classe  $C^1$ . □



## Parte 2

# Problemi al contorno per equazioni del secondo ordine



## Problemi per equazioni del secondo ordine

### 3.1. Il problema di Cauchy

Possiamo cercare l'analogo del problema (2.3)–(2.4) per equazioni del secondo ordine. È abbastanza chiaro, dal punto di vista intuitivo, che occorrerà prescrivere due dati sulla curva che porta il dato, per ottenere una soluzione unica. Consideriamo infatti il seguente problema di Cauchy per e.d.o., riletto come problema di e.d.p. grazie alla parametrizzazione in  $y$ :

$$u_{xx}(x, y) = 0, \quad (3.1)$$

$$u(0, y) = 0, \quad (3.2)$$

$$u_x(0, y) = 0. \quad (3.3)$$

Come è evidente, il secondo dato di Cauchy è necessario per l'unicità della soluzione.

Consideriamo come ulteriore esempio il problema per l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (3.4)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (3.5)$$

Qui, come nel caso delle equazioni del primo ordine, si chiede che  $\Omega$  sia un aperto che contiene la curva che porta il dato. Il problema (3.4)–(3.5) ha l'infinità di soluzioni (tra le altre)

$$u(x, y) = \alpha y, \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \times \mathbf{R}, \quad (3.6)$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Occorre quindi una seconda condizione per selezionarne una unica; questa ulteriore restrizione viene di solito assegnata sulla derivata normale della  $u$  alla curva che porta il dato; nel caso in esame per esempio potremmo richiedere

$$u_y(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1. \quad (3.7)$$

Il problema (3.4), (3.5), (3.7) ha in effetti la sola soluzione

$$u(x, y) = y, \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \times \mathbf{R}, \quad (3.8)$$

non solo tra quelle in (3.6), ma 'in generale', ossia nella classe di tutte le soluzioni (che in questo breve cenno non definiamo con precisione).

**OSSERVAZIONE 3.1.** Non è detto che ogni curva sia accettabile come curva che porta i dati: ricordiamo la condizione (2.11) che si è resa necessaria già nel caso delle e.d.p. del primo ordine. Non ci soffermiamo oltre su questo punto, perché siamo più interessati ai problemi al contorno (Sezione 3.2) che al problema di Cauchy.  $\square$

### 3.2. Problemi al contorno

Un'altra classe di problemi per equazioni del secondo ordine è costituita dai problemi ai valori al contorno. Questi problemi sono anche detti anche ai valori iniziali e al contorno quando siano posti per equazioni di evoluzione (come l'equazione del calore o quella delle onde). Infatti in questo caso è necessario prescrivere anche dei dati al tempo iniziale.

Nei problemi al contorno si assegna a priori il dominio su cui dovrà essere definita la soluzione, e questa richiesta è in genere essenziale nel risolvere il problema. Si consideri per esempio il problema, simile a (3.4)–(3.5),

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (3.9)$$

$$u(x, y) = 0, \quad x^2 + y^2 = 1. \quad (3.10)$$

Se si chiede solo che  $\Omega$  sia un aperto che contiene la curva che porta il dato, cioè la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, questo problema ha (almeno) l'infinità di soluzioni

$$u(x, y) = \alpha \ln(x^2 + y^2), \quad \text{in } \Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (3.11)$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbf{R}$ .

Prendendo il punto di vista dei problemi al contorno, cerchiamo invece le soluzioni definite in tutto il dominio di cui la curva che porta il dato è frontiera, ossia il cerchio

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

Si dimostra allora che esiste una unica soluzione del problema, che quindi come è ovvio è quella identicamente nulla.

Quindi nei problemi al contorno è sufficiente prescrivere *un solo* dato al contorno; quando questo è prescritto come il valore dell'incognita  $u$  si parla di *problema di Dirichlet*, mentre se è prescritto il valore della derivata normale di  $u$  sulla frontiera di  $\Omega$  si parla di *problema di Neumann*.

Si tenga presente che una seconda informazione sulla soluzione è comunque assegnata, come restrizione sul suo dominio di definizione.

Nel caso dei problemi posti per le equazioni di evoluzione, diciamo in un intervallo temporale  $(0, T)$ , è chiaro che il valore della soluzione (e delle sue derivate) al tempo finale  $T$  risulta determinato dai dati prescritti per i tempi precedenti  $t < T$ . Quindi non appare necessario, dal punto di vista dell'intuizione modellistica, prescrivere dati sulla parte della frontiera del dominio che giace su  $t = T$ ; questa considerazione intuitiva è infatti confermata dall'analisi matematica dei problemi in questione.

È infine possibile prescrivere il valore dell'incognita su una parte della frontiera del dominio, e invece il valore della derivata normale sulla parte rimanente. Si hanno in questo caso *problemi con condizioni miste*.

**OSSERVAZIONE 3.2.** (SIGNIFICATO MODELLISTICO DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO) Le condizioni del tipo di Dirichlet sono di immediata interpretazione, conseguente al significato dell'incognita  $u$ . Per esempio in problemi di diffusione del calore, ove in genere  $u$  rappresenta una temperatura, la condizione di Dirichlet si assegna quando la frontiera del dominio viene mantenuta a una temperatura nota.

Le condizioni del tipo di Neumann possono avere il significato di condizioni di flusso: sempre nel caso dell'equazione del calore, è infatti noto che il flusso di calore nel corpo è (proporzionale a)  $-u_x$  (almeno secondo la legge di Fourier). Oppure, nel caso dell'equazione delle onde, queste condizioni sono legate a vincoli di tipo meccanico (corda con estremo libero).  $\square$

**OSSERVAZIONE 3.3.** (INTERPRETAZIONE MATEMATICA DELLE CONDIZIONI AL CONTORNO) Nel seguito scriveremo formalmente condizioni del tipo (3.13), o (3.21), o ancora (3.25). Se le funzioni coinvolte in queste uguaglianze sono tutte continue (fino sul contorno compreso), il significato di tali condizioni è chiaro; tuttavia la teoria matematica permette di considerare anche casi in cui i dati non siano continui. Si noti che in effetti le applicazioni conducono a trattare anche problemi con dati irregolari; per esempio spesso le 'condizioni di compatibilità' non sono soddisfatte (vedi Sezione 3.9).  $\square$

### 3.3. Problemi al contorno per l'equazione di Laplace

Premettiamo una definizione di carattere generale:

**DEFINIZIONE 3.4.** Una funzione  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , ove  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  è un aperto, si dice *armonica* in  $\Omega$  se e solo se  $u \in C^2(\Omega)$ , e

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega.$$

$\square$

**3.3.1. Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace.** Il problema di Dirichlet in un aperto limitato  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  con frontiera regolare è:

$\mathcal{PD}_L$ : Assegnata  $u_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , determinare  $u \in C^2(\Omega)$  tale che

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (3.12)$$

$$u(x, y) = u_0(x, y), \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (3.13)$$

Questo problema ha un'unica soluzione sotto ipotesi ragionevoli sul dato al contorno (vedi Teorema 6.14, e Teorema 5.3).

**3.3.2. Problema di Neumann per l'equazione di Laplace.** Il problema di Neumann in un aperto limitato e connesso  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ , con frontiera regolare è:

$\mathcal{PN}_L$ : Assegnata  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , determinare  $u \in C^2(\Omega)$  tale che

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = f(x, y), \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (3.15)$$

Qui  $n$  è la normale esterna a  $\partial\Omega$ .

**OSSERVAZIONE 3.5.** Una *condizione necessaria* per la risolubilità del problema di Neumann è:

$$\int_{\partial\Omega} f \, d\sigma = 0. \quad (3.16)$$

Infatti per il teorema della divergenza, ammesso che una soluzione  $u$  esista, e sia in  $C^2(\overline{\Omega})$ ,

$$\int_{\partial\Omega} f \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \int_{\Omega} \Delta u \, dx = 0.$$

□

OSSERVAZIONE 3.6. È chiaro che se  $u$  risolve il problema di Neumann, anche  $u + \text{costante}$  lo risolve. Non può quindi esservi unicità di soluzioni per  $\mathcal{PN}_L$ , almeno nel senso pieno del termine. Si dimostra tuttavia che tutte le soluzioni si trovano per addizione di una costante (vedi Teorema 6.14). □

### 3.4. Problemi al valore iniziale e al contorno per l'equazione del calore

**3.4.1. Problema di Dirichlet per l'equazione del calore.** Per  $a < b$ ,  $0 < T$ , numeri reali, usiamo la notazione

$$\begin{aligned} Q_T &= (a, b) \times (0, T) = \{(x, t) \mid a < x < b, 0 < t < T\}, \\ \partial_p Q_T &= (\partial Q_T) \setminus \{(x, T) \mid a < x < b\}, \\ Q_T^* &= \overline{Q_T} \setminus \partial_p Q_T = (a, b) \times (0, T]. \end{aligned}$$

$Q_T^*$  si dice anche *interno parabolico* di  $Q_T$  (si noti che  $Q_T^* \not\subset Q_T$ ), e  $\partial_p Q_T$  si dice *frontiera parabolica* di  $Q_T$ .

La costante positiva  $D$  nel seguito denoterà la *diffusività*.

Il problema di Dirichlet per l'equazione del calore nel rettangolo  $Q_T$  è:

$\mathcal{PD}_C$ : Assegnata  $u_0 : \partial_p Q_T \rightarrow \mathbf{R}$ , determinare  $u \in C^{2,1}(Q_T^*)$  tale che

$$u_t - Du_{xx} = 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (3.17)$$

$$u(x, t) = u_0(x, t), \quad \text{su } \partial_p Q_T. \quad (3.18)$$

Questo problema ha un'unica soluzione sotto ipotesi ragionevoli sui dati al contorno e iniziale (vedi Teorema 6.7, e Teorema 5.10).

**3.4.2. Problema di Neumann per l'equazione del calore.** Il problema di Neumann per l'equazione del calore nel rettangolo  $Q_T = (a, b) \times (0, T)$ , con  $a < b$ ,  $T > 0$ , è

$\mathcal{PN}_C$ : Assegnate  $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$  determinare  $u \in C^{2,1}(Q_T^*)$ , tale che

$$u_t - Du_{xx} = 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (3.19)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (3.20)$$

$$Du_x(a, t) = f(t), \quad 0 < t < T, \quad (3.21)$$

$$Du_x(b, t) = g(t), \quad 0 < t < T. \quad (3.22)$$

OSSERVAZIONE 3.7. Il problema di Neumann per l'equazione del calore ha una soluzione unica, a differenza del problema di Neumann per l'equazione di Laplace (vedi Teorema 6.7). Questo è dovuto all'imposizione del dato iniziale, che proibisce la 'traslazione' per costanti additive arbitrarie, possibile invece nel caso dell'equazione di Laplace. □

### 3.5. Problemi ai valori iniziali e al contorno per l'equazione delle onde

Nel caso dell'equazione delle onde, che contiene la derivata temporale del secondo ordine dell'incognita, vanno prescritti due dati iniziali, ossia i valori dell'incognita, e della sua derivata temporale prima.

**3.5.1. Problema di Dirichlet per l'equazione delle onde.** Il problema di Dirichlet per l'equazione delle onde, posto nel rettangolo  $Q_T = (a, b) \times (0, T)$ ,  $a < b$ ,  $0 < T$ , è:

$\mathcal{PD}_O$ : Assegnate  $u_0, u_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$  determinare  $u \in C^2(Q_T)$ , tale che

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad a < x < b, 0 < t < T, \quad (3.23)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a < x < b, \quad (3.24)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad a < x < b, \quad (3.25)$$

$$u(a, t) = f(t), \quad T > t > 0, \quad (3.26)$$

$$u(b, t) = g(t), \quad T > t > 0. \quad (3.27)$$

Questo problema ha un'unica soluzione sotto ipotesi ragionevoli sui dati al contorno e iniziali (vedi Teorema 6.4).

**3.5.2. Problema di Neumann per l'equazione delle onde.** Il problema di Neumann per l'equazione delle onde, posto nel rettangolo  $Q_T = (a, b) \times (0, T)$ ,  $a < b$ ,  $0 < T$ , è:

$\mathcal{PN}_O$ : Assegnate  $u_0, u_1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f, g : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$  determinare  $u \in C^2(Q_T)$ , tale che

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad a < x < b, 0 < t < T, \quad (3.28)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a < x < b, \quad (3.29)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad a < x < b, \quad (3.30)$$

$$u_x(a, t) = f(t), \quad T > t > 0, \quad (3.31)$$

$$u_x(b, t) = g(t), \quad T > t > 0. \quad (3.32)$$

Vale per il problema  $\mathcal{PN}_O$  un'osservazione simile all'Osservazione 3.7. In particolare, questo problema ha un'unica soluzione sotto ipotesi ragionevoli sui dati al contorno e iniziali (vedi Teorema 6.4).

### 3.6. Problemi in domini illimitati

Quando il dominio spaziale su cui si cerca la soluzione è illimitato, in generale è necessario, per individuarla in modo univoco, imporre qualche condizione sul comportamento all'infinito della soluzione stessa.

Tipica fra tali restrizioni è la richiesta che la soluzione sia limitata su tutto il dominio. Per esempio, il problema

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \{y > 0\}, \quad (3.33)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (3.34)$$

ha (almeno) l'infinità di soluzioni

$$u(x, y) = \alpha y, \quad x \in \mathbf{R}, y \geq 0, \quad (3.35)$$

tra le quali però solo quella nulla è limitata sul semipiano.

### 3.7. Il problema di Cauchy in tutto lo spazio

Un caso particolare di problema posto in un dominio illimitato si ha quando il dominio è tutto lo spazio. Soprattutto quando l'equazione è di tipo evolutivo (delle onde o del calore) il problema si dice allora *problema di Cauchy* (ed è quindi omonimo del problema trattato nella Sezione 3.1, ma diverso).

#### 3.7.1. Problema di Cauchy per l'equazione del calore.

$\mathcal{PC}_C$ : Assegnata  $u_0 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  determinare  $u \in C^{2,1}(\mathbf{R} \times (0, T])$  tale che

$$u_t - Du_{xx} = 0, \quad \text{in } \mathbf{R} \times (0, T), \quad (3.36)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.37)$$

Per assicurare l'unicità della soluzione, occorre imporre qualche restrizione sul comportamento per  $x \rightarrow \pm\infty$  della medesima, per esempio che si mantenga limitata.

#### 3.7.2. Problema di Cauchy per l'equazione delle onde.

$\mathcal{PC}_O$ : Assegnate  $u_0, u_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  determinare  $u \in C^2(\mathbf{R} \times (0, T))$ , tale che

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad \text{in } \mathbf{R} \times (0, T), \quad (3.38)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3.39)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.40)$$

In questo caso non occorrono particolari restrizioni per ottenere unicità di soluzioni.

### 3.8. Dipendenza continua dai dati.

Un problema per e.d.p. che debba essere utilizzato come modello matematico nelle applicazioni dovrebbe essere *ben posto nel senso di Hadamard*. Questo significa che le soluzioni del problema devono esistere (quando i dati sono scelti in modo ragionevole), e che esse devono *dipendere con continuità* dai dati stessi. La dipendenza continua dai dati in sostanza equivale alla richiesta che le soluzioni corrispondenti a dati simili siano a loro volta simili tra di loro. Un modo più formale di esprimere questo concetto, se  $\text{dist}_{\text{sol}}$  indica una opportuna 'distanza' tra soluzioni, e  $\text{dist}_{\text{dati}}$  una 'distanza' tra dati, è:

$$\text{dist}_{\text{sol}}(u, \bar{u}) \leq C \text{dist}_{\text{dati}}(d, \bar{d}), \quad (3.41)$$

ove  $u [\bar{u}]$  è la soluzione corrispondente al dato  $d [\bar{d}]$ , e  $C > 0$  è una costante indipendente dai dati. Si noti che la (3.41), e in genere la dipendenza continua, implicano l'unicità della soluzione (assegnato il dato).

La buona posizione di un modello matematico garantisce, tra l'altro, che gli inevitabili errori di misura che si compiono nel determinare i dati si riflettano in modo controllabile sulla soluzione.

Risultati di dipendenza continua sono ad esempio: i Teoremi 6.1, 6.8, 10.10, 5.5, 5.12, 5.20; i Corollari 6.3, 6.6.

### 3.9. Condizioni di compatibilità

La regolarità possibile per le soluzioni di problemi ai valori iniziali e al contorno dipende come è ovvio da quella dei dati del problema.

Inoltre, nel caso di problemi posti in un dominio spaziale diverso da tutto lo spazio, possono nascere problemi di compatibilità tra i dati, in genere sulla frontiera del dominio all'istante iniziale, a prescindere dalla regolarità di ciascuno dei dati iniziali e al contorno. Consideriamo per esempio il problema

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad a < x < b, t > 0, \quad (3.42)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad a < x < b, \quad (3.43)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad a < x < b, \quad (3.44)$$

$$u(a, t) = \alpha(t), \quad t > 0, \quad (3.45)$$

$$u(b, t) = \beta(t), \quad t > 0. \quad (3.46)$$

Supponiamo di cercare soluzioni di classe  $C^2([a, b] \times [0, \infty))$ . Intanto è subito ovvio che dovrà essere

$$u_0 \in C^2([a, b]), \quad u_1 \in C^1([a, b]), \quad \alpha, \beta \in C^2([0, \infty)). \quad (3.47)$$

$C^0$ : Inoltre, se la soluzione è continua nella chiusura del suo dominio di definizione, deve essere

$$u_0(a) = \alpha(0), \quad u_0(b) = \beta(0). \quad (3.48)$$

$C^1$ : Imponiamo ora la regolarità  $C^1$ : su  $x = a$ ,  $x = b$  e  $t = 0$  si è già assunta nella (3.47) la corrispondente regolarità dei dati. Come si è visto per la (3.48), i dati si 'sovrappongono' nei due estremi dell'intervallo iniziale. Quindi si deve richiedere

$$u_1(a) = \alpha'(0), \quad u_1(b) = \beta'(0). \quad (3.49)$$

La  $u_x(a, 0)$  (per esempio) si può in effetti determinare come  $u_0'(a)$ , ma non è possibile ottenerla in altro modo in termini dei dati, e quindi non nascono qui altre questioni di compatibilità tra i dati (le cose stanno in modo diverso se si considera il problema di Neumann).

$C^2$ : Infine, occupiamoci delle condizioni che nascono dalla richiesta della regolarità  $C^2$ . Prendiamo per cominciare un punto  $(x, 0) \in (a, b) \times \{0\}$ . Qui deve valere

$$u_{tt}(x, 0) = c^2 u_{xx}(x, 0) = c^2 u_0''(x), \quad (3.50)$$

ossia la  $u_{tt}$  è determinata in modo diretto dal dato iniziale. Si noti che questa determinazione è indipendente dagli altri dati e quindi non possono nascere questioni di compatibilità tra i dati. Si prenda invece il punto  $(a, 0)$ . Qui, proprio per la (3.50), deve essere

$$u_{tt}(a, 0) = c^2 u_{xx}(a, 0) = c^2 u_0''(a).$$

Però la  $u_{tt}(a, 0)$  si può ricavare anche dalla (3.45), come  $\alpha''(0)$ . Siamo quindi condotti a imporre che

$$c^2 u_0''(a) = \alpha''(0), \quad c^2 u_0''(b) = \beta''(0). \quad (3.51)$$

Segue infine dai risultati del Capitolo 10 e del Capitolo 12 che sotto queste ipotesi la soluzione di (3.42)–(3.46) ha la regolarità voluta.

## Soluzioni: casi particolari

### 4.1. Soluzione per separazione delle variabili

**4.1.1. Equazione delle onde.** Risolviamo l'equazione delle onde per separazione delle variabili, ossia cerchiamone soluzioni della forma  $X(x)T(t)$ . Si arriva subito a

$$X(x)T''(t) - c^2X''(x)T(t) = 0,$$

da cui, supponendo  $XT \neq 0$ , si passa a

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = -\lambda \in \mathbf{R},$$

ove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che il valore comune di  $X''/X$  e  $T''/c^2T$  non può dipendere né da  $x$  né da  $t$ .

Con calcoli elementari si ottengono le soluzioni:

$\lambda < 0$ :

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \\ T(t) &= k_1 e^{\sqrt{-\lambda}ct} + k_2 e^{-\sqrt{-\lambda}ct}. \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ :

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 x + c_2, \\ T(t) &= k_1 t + k_2. \end{aligned}$$

$\lambda > 0$ :

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \\ T(t) &= k_1 \cos(\sqrt{\lambda}ct) + k_2 \sin(\sqrt{\lambda}ct). \end{aligned}$$

Si noti che la condizione  $XT \neq 0$  non è sempre verificata da queste soluzioni; tuttavia si può verificare per sostituzione diretta che esse danno soluzioni valide in tutto il piano, dette *soluzioni elementari*.

**4.1.2. Equazione del calore.** Per l'equazione del calore, se si cercano soluzioni nella forma  $X(x)T(t)$ , esse devono soddisfare

$$X(x)T'(t) - DX''(x)T(t) = 0,$$

da cui subito, supponendo  $XT \neq 0$ ,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{DT(t)} = -\lambda \in \mathbf{R},$$

proprio come sopra. Si ottengono le soluzioni:

$\lambda < 0$ :

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \\ T(t) &= k_1 e^{-\lambda Dt}. \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ :

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 x + c_2, \\ T(t) &= k_1. \end{aligned}$$

$\lambda > 0$ :

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \\ T(t) &= k_1 e^{-\lambda Dt}. \end{aligned}$$

Si verifica che queste *soluzioni elementari* risolvono la e.d.p. in tutto il piano, anche se la condizione  $XT \neq 0$  non è sempre verificata. Soluzioni non identicamente nulle, che si annullano agli estremi di un intervallo limitato, si hanno solo per  $\lambda > 0$ . Soluzioni che soddisfino condizioni di Neumann nulle agli estremi di un intervallo limitato, ma non siano identicamente nulle, si hanno solo per  $\lambda \geq 0$ .

**4.1.3. Equazione di Laplace.** Per l'equazione di Laplace le soluzioni nella forma  $X(x)Y(y)$  devono soddisfare

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

da cui se  $XY \neq 0$ ,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \in \mathbf{R}.$$

Segue:

$\lambda < 0$ :

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \\ Y(y) &= k_1 \cos(\sqrt{-\lambda}y) + k_2 \sin(\sqrt{-\lambda}y). \end{aligned}$$

$\lambda = 0$ :

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 x + c_2, \\ Y(y) &= k_1 y + k_2. \end{aligned}$$

$\lambda > 0$ :

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \\ Y(y) &= k_1 e^{\sqrt{\lambda}y} + k_2 e^{-\sqrt{\lambda}y}. \end{aligned}$$

Queste soluzioni risolvono l'equazione in tutto il piano; ora la scelta delle soluzioni che soddisfano certe condizioni al bordo dipende dalla forma del bordo medesimo ( $x = \text{costante}$ , o  $y = \text{costante}$ ).

## 4.2. Passaggio a coordinate polari

Il passaggio a coordinate polari ha senso nel piano delle coordinate spaziali  $(x, y)$ , e per questo noi ci limitiamo a considerarlo per l'equazione di Laplace, visto che trattiamo le equazioni delle onde e del calore in una sola dimensione spaziale per semplicità.

Sia dunque

$$v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (4.1)$$

la rappresentazione in coordinate polari di una funzione  $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$ . Come è noto il passaggio a coordinate polari introduce certe difficoltà, per esempio in  $r = 0$  si perde la biunivocità della trasformazione. Per chiarezza, osserviamo in dettaglio che

$$v \in C^2((0, \infty) \times [-\pi, \pi]),$$

e che le derivate prime e seconde di  $v$  si mantengono limitate anche per  $r \rightarrow 0$ . Infatti

$$\begin{aligned} v_r &= \nabla u \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, & v_\varphi &= \nabla u \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ v_{rr} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}^t D^2 u \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, & v_{\varphi\varphi} &= \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}^t D^2 u \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Inoltre, dalla (4.1),

$$v(0, \varphi) = u(0, 0), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (4.2)$$

$$v(r, -\pi) = v(r, \pi), \quad r \geq 0, \quad (4.3)$$

$$v_\varphi(r, -\pi) = v_\varphi(r, \pi), \quad r \geq 0, \quad (4.4)$$

$$v_{\varphi\varphi}(r, -\pi) = v_{\varphi\varphi}(r, \pi), \quad r \geq 0. \quad (4.5)$$

Tuttavia il gradiente e il laplaciano, espressi nelle coordinate polari, presentano delle singolarità nell'origine (che qui e nel seguito intenderemo nel senso di 'origine nel piano  $(x, y)$ ', corrispondente al segmento  $\{0\} \times [-\pi, \pi]$  nel piano  $(r, \varphi)$ ). Si veda l'Appendice B. In particolare, per  $r > 0$ ,

$$\Delta u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = v_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r}v_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \quad (4.6)$$

(si valuti la (4.6) da un punto di vista dimensionale).

È chiaro tuttavia che la singolarità nell'origine deve essere apparente, nel senso che

$$v_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r}v_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) \rightarrow \Delta u(0, 0), \quad r \rightarrow 0.$$

Se la  $u$  è definita e di classe  $C^2$  in un dominio diverso da tutto il piano, le considerazioni sopra valgono con le necessarie modifiche.

**4.2.1. Soluzioni a variabili separabili.** Risolviamo l'equazione

$$v_{rr}(r, \varphi) + \frac{1}{r}v_r(r, \varphi) + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}(r, \varphi) = 0 \quad (4.7)$$

per separazione delle variabili, ossia cerchiamo soluzioni dell'equazione di Laplace della forma  $R(r)\Phi(\varphi)$ . Si arriva subito a

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) = 0,$$

da cui, supponendo  $R\Phi \neq 0$ , si passa a

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda \in \mathbf{R}, \quad (4.8)$$

ove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che il valore comune dei due membri precedenti non può dipendere né da  $r$  né da  $\varphi$ .

La (4.8) dà il sistema

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0, \quad (4.9)$$

$$\Phi''(\varphi) - \lambda\Phi(\varphi) = 0. \quad (4.10)$$

L'equazione per  $R$  è del tipo di Eulero, mentre quella per  $\Phi$  è a coefficienti costanti.

Con calcoli elementari si ottengono le soluzioni:

$\lambda < 0$ :

$$R(r) = c_1 r^{\sqrt{-\lambda}} + c_2 r^{-\sqrt{-\lambda}},$$

$$\Phi(\varphi) = k_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\varphi) + k_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\varphi).$$

$\lambda = 0$ :

$$R(r) = c_1 + c_2 \ln r,$$

$$\Phi(\varphi) = k_1 + k_2 \varphi.$$

$\lambda > 0$ :

$$R(r) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} \ln r) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} \ln r),$$

$$\Phi(\varphi) = k_1 e^{\sqrt{\lambda}\varphi} + k_2 e^{-\sqrt{\lambda}\varphi}.$$

Si noti che la condizione  $R\Phi \neq 0$  non è sempre verificata da queste soluzioni; tuttavia si può verificare per sostituzione diretta che esse danno soluzioni valide in tutto  $r > 0$ ,  $-\pi < \varphi < \pi$ .

**OSSERVAZIONE 4.1. (SOLUZIONI IN CORONE CIRCOLARI)** Le soluzioni che corrispondono a funzioni regolari  $u(x, y)$ , definite in corone circolari centrate nell'origine, devono soddisfare le condizioni di periodicità (4.3)–(4.5) date sopra. Questo seleziona, tra tutte le soluzioni a variabili separabili trovate, le

$$v(r, \varphi) = (c_1 r^n + c_2 r^{-n}) (k_1 \cos(n\varphi) + k_2 \sin(n\varphi)), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.11)$$

$$v(r, \varphi) = c_1 + c_2 \ln r. \quad (4.12)$$

Se poi vogliamo anche che la  $u$  corrispondente sia regolare nell'origine (vedi la (4.2)), dobbiamo prendere  $c_2 = 0$  nelle (4.11), (4.12).  $\square$

**OSSERVAZIONE 4.2. (SOLUZIONI IN SETTORI DI PIANO)** Consideriamo  $\beta \in (0, 2\pi]$ , e il settore di piano

$$Q_\beta := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid r > 0, 0 < \varphi < \beta\}.$$

Le funzioni della forma

$$v(r, \varphi) = c_1 r^{\frac{\pi}{\beta}} \sin\left(\frac{\pi}{\beta}\varphi\right), \quad (4.13)$$

corrispondono a soluzioni del problema

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in Q_\beta, \quad (4.14)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial Q_\beta. \quad (4.15)$$

In genere esistono anche altre soluzioni. Per esempio, se  $\beta = 2\pi$ , esiste anche la soluzione

$$v(r, \varphi) = r \sin \varphi,$$

ossia  $u = y$ .

□



## Principi di massimo

### 5.1. Principio di massimo per l'equazione di Laplace

Il principio di massimo nella sua formulazione più semplice stabilisce che una funzione che soddisfa una certa equazione o disequazione differenziale in un dominio assume il suo massimo sulla frontiera del dominio.

**TEOREMA 5.1.** *Sia  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , e sia  $\Delta u \geq 0$  in  $\Omega$ , ove  $\Omega$  è aperto e limitato. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \quad (5.1)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia

$$v(x, y) = u(x, y) + \varepsilon x^2,$$

con  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Se  $v$  avesse un punto di massimo  $(\bar{x}, \bar{y})$  in  $\Omega$  si avrebbe

$$\Delta v(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0,$$

mentre

$$\Delta v = \Delta u + 2\varepsilon \geq 2\varepsilon > 0, \quad \text{in } \Omega.$$

Quindi  $v$  non può assumere punti di massimo in  $\Omega$ , ossia

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \xi^2,$$

se  $\xi = \max_{\partial\Omega} |x|$ . Per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ottiene la (5.1).  $\square$

**OSSERVAZIONE 5.2.** (PRINCIPIO DEL MASSIMO FORTE) In realtà, sotto le ipotesi del Teorema 5.1 vale il seguente (migliore) risultato, detto *principio del massimo forte*: se  $u$  assume il suo massimo non solo sulla frontiera di  $\Omega$ , ma anche in qualche punto dell'interno, e se  $\Omega$  è connesso, allora  $u$  è costante in  $\Omega$ .

Omettiamo la dimostrazione di questo risultato.  $\square$

### 5.2. Applicazioni al problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Vale il teorema

**TEOREMA 5.3.** *Se  $u_0 \in C(\partial\Omega)$ , esiste un'unica soluzione del problema  $\mathcal{PD}_L$  della Sezione 3.3.*

**DIMOSTRAZIONE.** Unicità: Date due soluzioni  $u_1, u_2$ , definiamo  $v = u_1 - u_2$ . Basta allora applicare il Teorema 5.1 a  $v$  e  $-v$  per ottenere  $v \equiv 0$  in  $\Omega$ .

L'esistenza si trova dimostrata nel caso particolare in cui  $\Omega$  è un cerchio nella Sezione 11.5; vedi anche la Sezione 11.2 per il caso in cui  $\Omega$  è il semipiano.  $\square$

OSSERVAZIONE 5.4. Se il dato  $u_0$  non è continuo su  $\partial\Omega$ , ma solo continuo a tratti, esiste ancora una soluzione  $u \in C^2(\Omega)$  di  $\mathcal{PD}_L$ , unica nella classe delle soluzioni limitate su  $\Omega$ . Per queste soluzioni vale ancora il principio del massimo, nella forma  $u \leq \sup_{\partial\Omega} u_0$  in  $\Omega$ .  $\square$

### 5.2.1. Dipendenza continua dai dati.

TEOREMA 5.5. Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni di  $\mathcal{PD}_L$ , corrispondenti a due dati  $u_{01}, u_{02} \in C(\partial\Omega)$ . Allora

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial\Omega} |u_{01} - u_{02}|. \quad (5.2)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dal [principio di massimo](#).  $\square$

### 5.2.2. Stime di soluzioni mediante il metodo delle soprasoluzioni.

Volendo ottenere maggiorazioni di  $u(x)$ , quando la soluzione non può essere calcolata in modo esplicito, si può fare uso del principio del confronto: se

$$\Delta v \leq 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (5.3)$$

$$v(x, y) \geq u_0(x, y), \quad \text{su } \partial\Omega, \quad (5.4)$$

allora  $v \geq u$  in  $\Omega$  (questo segue da una semplice applicazione del principio del massimo a  $v - u$ ). Per queste funzioni  $v \in C^2(\Omega) \cap C\overline{\Omega}$  che soddisfino le relazioni (5.3)–(5.4) si dicono *soprasoluzioni*.

È pertanto utile disporre di un certo numero di soluzioni esplicite di (3.12). Per esempio

$$\begin{aligned} v(x, y) &= e^{\alpha x} \sin(\alpha y), & v(x, y) &= e^{\alpha x} \cos(\alpha y), & \dots & \alpha \in \mathbf{R}, \\ v(x, y) &= 1, & v(x, y) &= x, & v(x, y) &= xy, & v(x, y) &= x^2 - y^2, \end{aligned}$$

e loro combinazioni lineari sono tutte soluzioni.

Altre soluzioni esplicite si possono ottenere in coordinate polari; si sa (vedi Appendice B) che

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Dunque si verifica subito che, per ogni  $\alpha \in \mathbf{R}$ , le funzioni

$$v(x, y) = r^\alpha \sin(\alpha\varphi), \quad v(x, y) = r^\alpha \cos(\alpha\varphi),$$

sono soluzioni in  $\mathbf{R}^2$  privato di una semiretta per l'origine. Vedi anche il Capitolo 4.

## 5.3. Principio di massimo per l'equazione del calore

Per  $a < b$ ,  $0 < T$  numeri reali, ricordiamo le definizioni di interno parabolico  $Q_T^*$  e frontiera parabolica  $\partial_p Q_T$  date in Sezione 3.4.

TEOREMA 5.6. Sia  $u \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$  tale che  $u_t - Du_{xx} \leq 0$  in  $Q_T^*$ . Allora

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\partial_p Q_T} u. \quad (5.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo la funzione  $v \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$

$$v(x, t) = (u(x, t) - M)e^{-\varepsilon t}, \quad \text{ove } M = \max_{\partial_p Q_T} u.$$

Qui  $\varepsilon > 0$  è una costante arbitraria.

Se risulta  $v \leq 0$  in  $Q_T$  non c'è nient'altro da dimostrare. Supponiamo allora, per assurdo, che  $v$  risulti positiva in qualche punto di  $Q_T$ . Dato che  $v \leq 0$  comunque su  $\partial_p Q_T$ , allora il massimo positivo di  $v$  viene preso in un certo  $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q_T^*$ . Dunque, per noti risultati del calcolo elementare,

$$v_t(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0, \quad v_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0 \quad \implies \quad v_t - Dv_{xx} \geq 0, \quad \text{in } (\bar{x}, \bar{t}). \quad (5.6)$$

D'altronde, per definizione di  $v$ , e ricordando le ipotesi, si ha in  $Q_T^*$ ,

$$v_t - Dv_{xx} = u_t e^{-\varepsilon t} - \varepsilon v - Du_{xx} e^{-\varepsilon t} = (u_t - Du_{xx})e^{-\varepsilon t} - \varepsilon v \leq -\varepsilon v.$$

In particolare, in  $(\bar{x}, \bar{t})$  si ha  $v(\bar{x}, \bar{t}) > 0$ , e dunque  $v_t - Dv_{xx} < 0$ , contro (5.6).  $\square$

I seguenti corollari sono di derivazione immediata.

**COROLLARIO 5.7.** *Sia  $u \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$  tale che  $u_t - Du_{xx} \geq 0$  in  $Q_T^*$ . Allora*

$$\min_{\overline{Q_T}} u \geq \min_{\partial_p Q_T} u. \quad (5.7)$$

**COROLLARIO 5.8.** *Sia  $u \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$  tale che  $u_t - Du_{xx} = 0$  in  $Q_T^*$ . Allora*

$$\min_{\partial_p Q_T} u \leq u(x, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} u, \quad \text{per ogni } (x, t) \in Q_T^*. \quad (5.8)$$

**OSSERVAZIONE 5.9.** In realtà vale anche per l'equazione del calore il principio del massimo *forte*, nel senso che se, per  $u$  come in Corollario 5.8, esiste un  $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q_T^*$  tale che in esso una delle disuguaglianze in (5.8) vale come uguaglianza, allora  $u$  è costante in  $Q_{\bar{t}}$ . La dimostrazione di questo teorema viene omessa.  $\square$

#### 5.4. Applicazioni al problema di Dirichlet per l'equazione del calore

Vale il teorema

**TEOREMA 5.10.** *Se  $u_0 \in C(\partial_p Q_T)$ , esiste un'unica soluzione di  $\mathcal{PDC}$ .*

L'unicità si dimostra in modo simile al Teorema 5.3, oppure segue dal Teorema 5.12.

**OSSERVAZIONE 5.11.** Se il dato  $u_0$  non è continuo su  $\partial_p Q_T$ , ma solo continuo a tratti, esiste ancora una soluzione  $u \in C^{2,1}(Q_T^*)$  di  $\mathcal{PDC}$ , unica nella classe delle soluzioni limitate su  $Q_T$ . Per queste soluzioni vale ancora il principio del massimo, nella forma  $u \leq \sup_{\partial_p Q_T} u_0$  in  $Q_T$ .  $\square$

##### 5.4.1. Dipendenza continua dai dati.

**TEOREMA 5.12.** *Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni di  $\mathcal{PDC}$ , corrispondenti a due dati  $u_{01}, u_{02} \in C(\partial_p Q_T)$ . Allora*

$$\max_{\overline{Q_T}} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial_p Q_T} |u_{01} - u_{02}|. \quad (5.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Segue subito dal [principio di massimo](#).  $\square$

### 5.4.2. Stime di soluzioni mediante il metodo delle soprasoluzioni.

Volendo ottenere maggiorazioni di  $u(x, t)$ , quando la soluzione non può essere calcolata in modo esplicito, si può fare uso del principio del confronto: se

$$v_t - Dv_{xx} \geq 0, \quad \text{in } Q_T^*, \quad (5.10)$$

$$v(x, t) \geq u_0(x, t), \quad \text{su } \partial_p Q_T, \quad (5.11)$$

allora  $v \geq u$  in  $Q_T$  (questo segue da una semplice applicazione del principio del massimo a  $v - u$ ). Per queste funzioni  $v \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$  che soddisfino le relazioni qui sopra si dicono *soprasoluzioni* di  $\mathcal{PD}_C$ .

È pertanto utile disporre di un certo numero di soluzioni esplicite di (3.17). Per esempio

$$\begin{aligned} v(x, t) &= e^{-\alpha^2 Dt} \sin(\alpha x), & v(x, t) &= e^{-\alpha^2 Dt} \cos(\alpha x), & \alpha &\in \mathbf{R}, \\ v(x, t) &= 1, & v(x, t) &= x, & v(x, t) &= x^2 + 2Dt, \end{aligned}$$

e le loro combinazioni lineari sono tutte soluzioni. Vedi anche il Capitolo 4.

ESEMPIO 5.13. Consideriamo il caso in cui  $a = 0$ ,  $b = \pi$ ,

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 1 - \left| 1 - \frac{2x}{\pi} \right|, & 0 \leq x \leq \pi, t = 0, \\ u_0(x, t) &= 0, & x \in \{0, \pi\}, t > 0. \end{aligned}$$

Dato che  $v = e^{-Dt} \sin x$  soddisfa (5.10), (5.11), si ottiene

$$0 \leq u(x, t) \leq e^{-Dt} \sin x, \quad 0 < x < \pi, 0 < t.$$

□

ESEMPIO 5.14. Consideriamo il caso in cui  $a = -\pi/2$ ,  $b = \pi/2$ ,

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 1, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, t = 0, \\ u_0(x, t) &= 0, & x \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\}, t > 0. \end{aligned}$$

In questo caso il dato  $u_0$  non è continuo. Definiamo

$$v(x, t) = Ce^{-\alpha^2 Dt} \cos(\alpha x),$$

con  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $C > 0$  da scegliere. Intanto è chiaro che  $v \geq u_0$  per  $t > 0$  e  $|x| = \pi/2$ . Per ottenere  $v(x, 0) \geq u_0(x, 0) = 1$ , occorre che

$$\min_{|x| \leq \frac{\pi}{2}} C \cos(\alpha x) = C \cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) \geq 1, \quad \text{cioè} \quad C = \frac{1}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Pertanto

$$0 \leq u(x, t) \leq e^{-\alpha^2 t} \frac{\cos(\alpha x)}{\cos\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right)}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < t.$$

Si noti che qui la scelta di  $\alpha \in (0, 1)$  è arbitraria. □

### 5.5. Il lemma di Hopf per l'equazione di Laplace

LEMMA 5.15. (HOPF) *Sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  regolare come richiesto alla soluzione di  $\mathcal{PN}_L$ , e in particolare sia  $\Omega$  connesso. Se  $u$  soddisfa  $\Delta u \leq 0$  in  $\Omega$ , non è costante in  $\Omega$ , e assume il minimo in  $\bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$ , allora  $\frac{\partial u}{\partial n}(\bar{\mathbf{x}}) < 0$ . Questo se in  $\bar{\mathbf{x}}$  la frontiera di  $\Omega$  è abbastanza regolare, ossia se esiste una sfera aperta  $B \subset \Omega$ , tale che  $\partial B \cap \partial\Omega = \{\mathbf{x}\}$ .*

(La dimostrazione viene omissa.)

Si noti che la disuguaglianza *non stretta*  $\frac{\partial u}{\partial n}(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0$  è ovvia: il contenuto del lemma di Hopf sta proprio nella dimostrazione della disuguaglianza stretta. Un enunciato analogo vale se  $u$  soddisfa  $\Delta u \geq 0$  in  $\Omega$ , e assume il massimo in  $\bar{\mathbf{x}} \in \partial\Omega$ .

Con questo risultato si può ottenere una dimostrazione del teorema di unicità (a meno di costanti additive) per soluzioni di  $\mathcal{PN}_L$ .

### 5.6. Il lemma di Hopf per l'equazione del calore

LEMMA 5.16. (HOPF PARABOLICO) *Sia  $u : Q_T \rightarrow \mathbf{R}$  regolare come richiesto alla soluzione di  $\mathcal{PN}_C$ . Se  $u$  soddisfa  $u_t - Du_{xx} \geq 0$  in  $Q_T$ , assume il minimo in  $(a, \bar{t})$  [rispettivamente, in  $(b, \bar{t})$ ], con  $\bar{t} > 0$ , e non è costante in  $Q_{\bar{t}}$ , allora  $u_x(a, \bar{t}) > 0$  [rispettivamente,  $u_x(b, \bar{t}) < 0$ ].*

(La dimostrazione viene omissa.)

Si noti che la disuguaglianza *non stretta*  $u_x(a, \bar{t}) \geq 0$  è ovvia: il contenuto del lemma di Hopf sta proprio nella dimostrazione della disuguaglianza stretta. Un enunciato analogo vale se  $u$  soddisfa  $u_t - Du_{xx} \leq 0$  in  $Q_T$ , e assume il massimo per  $t > 0$ .

#### 5.6.1. Stime di soluzioni mediante il metodo delle soprasoluzioni.

Una funzione  $v$  (regolare come la soluzione del problema  $\mathcal{PN}_C$ ) che soddisfa

$$v_t - Dv_{xx} \geq 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (5.12)$$

$$v(x, 0) \geq u_0(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (5.13)$$

$$Dv_x(a, t) \leq f(t), \quad 0 < t < T, \quad (5.14)$$

$$Dv_x(b, t) \geq g(t), \quad 0 < t < T, \quad (5.15)$$

si dice *soprasoluzione* di  $\mathcal{PN}_C$ , perché

TEOREMA 5.17. *Se  $u$  risolve  $\mathcal{PN}_C$ , e  $v$  risolve (5.12)–(5.15), si ha  $v \geq u$  in  $Q_T$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $w = v - u$ . Allora  $w$  soddisfa

$$w_t - Dw_{xx} \geq 0, \quad \text{in } Q_T,$$

$$w(x, 0) \geq 0, \quad a \leq x \leq b,$$

$$w_x(a, t) \leq 0, \quad 0 < t < T,$$

$$w_x(b, t) \geq 0, \quad 0 < t < T.$$

Per il principio di massimo,  $w$  deve assumere il minimo su  $\partial_p Q_T$ . D'altra parte, se lo assumesse su un punto  $(a, \bar{t})$ , con  $\bar{t} > 0$ , si dovrebbe avere  $w_x(a, \bar{t}) > 0$ , per il Lemma 5.16, contro la condizione  $w_x \leq 0$  su  $x = a$  per  $t > 0$ . Nello stesso modo si esclude che il minimo sia assunto per  $x = b$ .

Perciò il minimo è assunto per  $t = 0$ , ove  $w \geq 0$ . Quindi  $w \geq 0$  su tutto  $Q_T$ .  $\square$

OSSERVAZIONE 5.18. Il Teorema 5.17 implica subito un risultato di unicità per  $\mathcal{PN}_C$ .  $\square$

ESEMPIO 5.19. Si consideri la soluzione  $u$  di

$$u_t - Du_{xx} = 0, \quad \text{in } (0, L) \times (0, T), \quad (5.16)$$

$$u(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.17)$$

$$Du_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (5.18)$$

$$Du_x(b, t) = \cos^2 t, \quad 0 < t < T. \quad (5.19)$$

Allora,  $u$  non può avere minimi o massimi su  $x = 0$  per  $t > 0$ , per il lemma di Hopf. Su  $x = L$ , si ha  $u_x \geq 0$ . Dunque  $u$  può assumervi un massimo, ma non un minimo; si noti che abbiamo bisogno del lemma di Hopf per escludere che il minimo possa essere assunto per  $t = (2k + 1)\pi/2$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , ove  $u_x = 0$ . Perciò il minimo di  $u$  è assunto per  $t = 0$ , e anzi solo per  $(x, t) = (0, 0)$ , per il principio del massimo forte. Dunque  $u > 0$  in ogni altro punto del suo dominio di definizione.  $\square$

### 5.6.2. Dipendenza continua dal dato iniziale.

TEOREMA 5.20. *Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni del problema di Neumann  $\mathcal{PN}_C$ . Supponiamo che i dati al bordo  $f$  e  $g$  coincidano per le due soluzioni, mentre i dati iniziali siano due qualunque funzioni  $u_{01}, u_{02} \in C([a, b])$ . Allora*

$$\max_{Q_T} |u_1 - u_2| \leq \max_{[a, b]} |u_{01} - u_{02}|. \quad (5.20)$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 5.16 di Hopf parabolico il massimo, o il minimo, della differenza  $w = u_1 - u_2$  non possono essere presi sui bordi  $x = a$ ,  $x = b$ , per  $t > 0$ , perché  $w_x = 0$  su tali bordi. La (5.20) segue subito per il principio del massimo.  $\square$

## Parte 3

# Metodo di Fourier



## Stime dell'energia

Il metodo dell'energia consiste in sostanza nel trovare stime di integrali coinvolgenti i valori della soluzione dell'e.d.p., e delle sue derivate prime. È così chiamato perché tali integrali possono essere interpretati, da un punto di vista modellistico, come misure dell'energia posseduta dal sistema fisico modellato.

La tecnica che useremo per ottenere queste stime, in sostanza, si riduce a moltiplicare la e.d.p. per la soluzione medesima (o per una sua derivata), e integrare per parti.

### 6.1. Equazione delle onde

Consideriamo funzioni  $z$  che soddisfino

$$z_{tt} - c^2 z_{xx} = 0, \quad \text{in } Q_T = (a, b) \times (0, T). \quad (6.1)$$

**TEOREMA 6.1.** *Sia  $z \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q_T})$  una soluzione di (6.1), e soddisfi  $z(a, t) = 0$ , o  $z_x(a, t) = 0$  per ogni  $0 \leq t \leq T$ , oltre a una analoga condizione in  $x = b$ . Vale allora*

$$\int_a^b z(x, t)^2 dx \leq e^{T^2} \left\{ \int_a^b z(x, 0)^2 dx + \int_a^b z_t(x, 0)^2 dx \right\}, \quad (6.2)$$

per ogni  $0 \leq t \leq T$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo  $\bar{t} \in (0, T)$ . Introduciamo la funzione

$$Z(x, t) = \int_t^{\bar{t}} z(x, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in Q_{\bar{t}}.$$

Iniziamo a trattare il caso in cui  $z \in C^2(\overline{Q_T})$ . Moltiplichiamo la (6.1) per  $Z$  e integriamo per parti su  $(a, b) \times (0, \bar{t})$ . Si ottiene, osservando anche che  $Z_t = -z$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\bar{t}} \int_a^b [Z z_{tt} - c^2 Z z_{xx}] dx dt \\ &= \int_a^b [Z(x, t) z_t(x, t)]_{t=\bar{t}}^{t=0} dx + \int_0^{\bar{t}} \int_a^b z(x, t) z_t(x, t) dx dt \\ &\quad - c^2 \int_0^{\bar{t}} [Z(x, t) z_x(x, t)]_{x=a}^{x=b} dt + c^2 \int_0^{\bar{t}} \int_a^b \left[ \int_t^{\bar{t}} z_x(x, \tau) d\tau \right] z_x(x, t) dx d\tau. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che  $Z(x, \bar{t}) = 0$ , e che

$$\left[ \int_t^{\bar{t}} z_x(x, \tau) d\tau \right] z_x(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_t^{\bar{t}} z_x^2(x, \tau) d\tau \right].$$

Dunque

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b Z(x, 0) z_t(x, 0) dx + \frac{1}{2} \int_a^b z(x, \bar{t})^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b z(x, 0)^2 dx \\ &\quad - c^2 \int_0^{\bar{t}} [Z(x, t) z_x(x, t)]_{x=a}^{x=b} dt + \frac{1}{2} c^2 \int_a^b \left[ \int_0^{\bar{t}} z_x(x, \tau)^2 d\tau \right] dx \\ &=: J_0(\bar{t}) + \frac{1}{2} \int_a^b z(x, \bar{t})^2 dx - \frac{1}{2} \int_a^b z(x, 0)^2 dx - J_1(\bar{t}) + J_2(\bar{t}). \end{aligned}$$

Vale  $J_2(\bar{t}) \geq 0$ , e, sotto le nostre ipotesi,  $J_1(\bar{t}) = 0$ . Segue, per le osservazioni 7.4 e 7.5, che

$$\begin{aligned} \int_a^b z(x, \bar{t})^2 dx &\leq \int_a^b z(x, 0)^2 dx + 2J_0(\bar{t}) \\ &\leq \int_a^b z(x, 0)^2 dx + \int_a^b z_t(x, 0)^2 dx + \int_a^b \left[ \int_0^{\bar{t}} z(x, \tau) d\tau \right]^2 dx \\ &\leq \int_a^b z(x, 0)^2 dx + \int_a^b z_t(x, 0)^2 dx + \bar{t} \int_a^b \int_0^{\bar{t}} z(x, \tau)^2 d\tau dx \\ &=: K_0 + \bar{t} \int_0^{\bar{t}} \int_a^b z(x, \tau)^2 dx d\tau. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dato che  $\bar{t} \in (0, T)$  è arbitrario, ponendo

$$y(t) = \int_0^t \int_a^b z(x, \tau)^2 dx d\tau,$$

la (6.3) implica la

$$y'(t) \leq K_0 + Ty(t), \quad 0 < t < T,$$

che come è noto (per esempio integrando per separazione delle variabili, e supponendo senza perdita di generalità  $K_0 > 0$ ) permette di ricavare

$$\ln \frac{K_0 + Ty(t)}{K_0} \leq Tt,$$

e dunque

$$K_0 + Ty(t) \leq K_0 e^{T^2} \quad 0 < t < T. \tag{6.4}$$

Usando la (6.4) nella (6.3) si ottiene infine la (6.2) nel caso in cui  $z \in C^2(\overline{Q_T})$ .

Il caso in cui  $z$  ha solo la regolarità richiesta nell'enunciato si ottiene per approssimazione, con una tecnica simile a quella impiegata sotto nel Teorema 6.5.  $\square$

TEOREMA 6.2. *Sia  $z \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q_T})$  una soluzione di (6.1). Vale allora*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^b z_t(x, t)^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_a^b z_x(x, t)^2 dx &= \frac{1}{2} \int_a^b z_t(x, 0)^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_a^b z_x(x, 0)^2 dx \\ &+ c^2 \int_0^T [z_x(b, t)z_t(b, t) - z_x(a, t)z_t(a, t)] dx, \quad (6.5) \end{aligned}$$

per ogni  $0 \leq t \leq T$ .

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo a trattare il caso in cui  $z \in C^2(\overline{Q_T})$ . Moltiplichiamo la (6.1) per  $z_t$  e integriamo per parti su  $(a, b) \times (0, t)$ . Si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_a^b [z_\tau z_{\tau\tau} - c^2 z_\tau z_{xx}] dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b [z_t(x, \tau)^2]_{\tau=0}^{\tau=t} dx - c^2 \int_0^t [z_\tau(x, \tau)z_x(x, \tau)]_{x=a}^{x=b} d\tau \\ &\quad + c^2 \int_0^t \int_a^b z_{x\tau}(x, \tau)z_x(x, \tau) dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b [z_t(x, \tau)^2]_{\tau=0}^{\tau=t} dx + \frac{c^2}{2} \int_a^b [z_x(x, \tau)^2]_{\tau=0}^{\tau=t} dx \\ &\quad - c^2 \int_0^t [z_\tau(x, \tau)z_x(x, \tau)]_{x=a}^{x=b} d\tau. \end{aligned}$$

Da qui segue la tesi nel caso di  $z \in C^2(\overline{Q_T})$ . Il caso in cui  $z$  ha solo la regolarità richiesta nell'enunciato si ottiene per approssimazione, con una tecnica simile a quella impiegata sotto nel Teorema 6.5.  $\square$

Segue subito

COROLLARIO 6.3. *Sia  $z$  come in Teorema 6.2, e soddisfi  $z(a, t) = 0$ , o  $z_x(a, t) = 0$  per ogni  $0 \leq t \leq T$ , oltre a una analoga condizione in  $x = b$ . Vale allora per ogni  $0 \leq t \leq T$*

$$\frac{1}{2} \int_a^b z_t(x, t)^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_a^b z_x(x, t)^2 dx = \frac{1}{2} \int_a^b z_t(x, 0)^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_a^b z_x(x, 0)^2 dx. \quad (6.6)$$

### 6.1.1. Applicazioni ai problemi al contorno.

**TEOREMA 6.4.** (UNICITÀ) *Siano  $u_1, u_2 \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q_T})$  entrambe soluzioni di  $\mathcal{PN}_O$ , o entrambe soluzioni di  $\mathcal{PD}_O$ . Allora  $u_1 = u_2$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poniamo  $z = u_1 - u_2$ , e applichiamo a  $z$  il Teorema 6.1. Si ottiene

$$\int_a^b z(x, t)^2 dx \leq 0,$$

per ogni  $0 \leq t \leq T$ , e dunque  $z = 0$  in tutto  $Q_T$ .  $\square$

### 6.2. Equazione del calore

Indichiamo ancora  $Q_t = (a, b) \times (0, t)$ , e usiamo poi la notazione della Sezione 5.3 del Capitolo 5.

Cosideriamo soluzioni di

$$z_t - Dz_{xx} = 0, \quad \text{in } Q_T. \quad (6.7)$$

**TEOREMA 6.5.** *Sia  $z \in C^{2,1}(Q_T^*) \cap C(\overline{Q_T})$ , con  $z_x \in C([a, b] \times (0, T])$ , e tale che  $z_x(a, t), z_x(b, t)$  siano limitate su  $(0, T)$ . Supponiamo anche che  $z$  risolva (6.7). Allora vale per ogni  $0 \leq t \leq T$ ,*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_a^b z(x, t)^2 dx + D \iint_{Q_t} z_x(x, \tau)^2 dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b z(x, 0)^2 dx + \int_0^t [z(b, \tau)Dz_x(b, \tau) - z(a, \tau)Dz_x(a, \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (6.8)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per motivi di regolarità (cioè per essere sicuri che tutti gli integrali siano definiti) procediamo approssimando  $Q_t$  con dei rettangoli contenuti nell'interno parabolico, ossia con

$$Q_t^{\varepsilon, \sigma} = [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \times [\sigma, t], \quad 0 < \varepsilon < (b - a)/2, 0 < \sigma < t.$$

Moltiplichiamo  $z_\tau - Dz_{xx} = 0$  per  $z$  e integriamo per parti in  $Q_t^{\varepsilon, \sigma}$

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{Q_t^{\varepsilon, \sigma}} [zz_\tau - zDz_{xx}] dx d\tau = \frac{1}{2} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} z(x, t)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} z(x, \sigma)^2 dx \\ &+ \int_\sigma^t z(a + \varepsilon, \tau)Dz_x(a + \varepsilon, \tau) d\tau - \int_\sigma^t z(b - \varepsilon, \tau)Dz_x(b - \varepsilon, \tau) d\tau \\ &+ D \iint_{Q_t^{\varepsilon, \sigma}} z_x(x, \tau)^2 dx d\tau. \end{aligned}$$

Mandiamo ora  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ottenendo, visto che  $z$  e  $z_x$  sono continue fino sui bordi laterali di  $Q_T$ , almeno per  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_a^b z(x, t)^2 dx + D \int_{\sigma}^t \int_a^b z_x(x, \tau)^2 dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b z(x, \sigma)^2 dx - \int_{\sigma}^t z(a, \tau) D z_x(a, \tau) d\tau + \int_{\sigma}^t z(b, \tau) D z_x(b, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Infine, ricordando che  $z$  è continua nella chiusura di  $Q_T$ , e anche la regolarità di  $z_x$ , si può prendere  $\sigma \rightarrow 0$  e ottenere la tesi (6.8).  $\square$

Segue subito

**COROLLARIO 6.6.** *Sia  $z$  come in Teorema 6.5, e soddisfi  $z(a, t) = 0$ , o  $z_x(a, t) = 0$  per ogni  $0 \leq t \leq T$ , oltre a una analoga condizione in  $x = b$ . Vale allora per ogni  $0 \leq t \leq T$*

$$\frac{1}{2} \int_a^b z(x, t)^2 dx + D \iint_{Q_t} z_x(x, \tau)^2 dx d\tau = \frac{1}{2} \int_a^b z(x, 0)^2 dx. \quad (6.9)$$

### 6.2.1. Applicazioni ai problemi al contorno.

**TEOREMA 6.7. (UNICITÀ)** *Siano  $u_1$  e  $u_2$  nella stessa classe di regolarità di  $z$  nel Teorema 6.5, e siano entrambe soluzioni di  $\mathcal{PN}_C$ , o entrambe soluzioni di  $\mathcal{PD}_C$ . Allora  $u_1 = u_2$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Utilizziamo il Corollario 6.6. Se  $u_1, u_2$  sono due soluzioni, allora  $z = u_1 - u_2$  soddisfa le ipotesi di Corollario 6.6, con  $z_x z \equiv 0$  su  $x = a$ ,  $x = b$ , e  $z(x, 0) \equiv 0$ . Ne segue che

$$\int_a^b z(x, t)^2 dx = 0, \quad \text{per ogni } 0 < t \leq T,$$

provando così che  $z \equiv 0$  in  $Q_T$ .  $\square$

Si intende nel Teorema 6.7 che i dati iniziali e al contorno per le due  $u_i$  siano i medesimi. Ammettendo che i dati iniziali possano essere diversi, si ha

**TEOREMA 6.8. (DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI)** *Siano  $u_1$  e  $u_2$  come nel Teorema 6.7, ove si ammette che i dati iniziali  $u_{01}$  e  $u_{02}$  possano differire. Allora*

$$\int_a^b |u_1(x, t) - u_2(x, t)|^2 dx \leq \int_a^b |u_{01}(x) - u_{02}(x)|^2 dx, \quad 0 < t \leq T. \quad (6.10)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La (6.10) è una conseguenza immediata di Corollario 6.6.  $\square$

**6.2.2. Il caso di equazioni con sorgente non nulla.** Consideriamo il caso in cui l'equazione contenga un termine noto diverso da zero, cioè il caso in cui (6.7) sia sostituita da

$$z_t - Dz_{xx} = F(x, t), \quad \text{in } Q_T. \quad (6.11)$$

Vale

**TEOREMA 6.9.** *Sia  $z$  regolare come in Teorema 6.5, soluzione della (6.11), ove si assume che  $F$  sia integrabile e limitata in  $Q_T$ . Supponiamo anche che  $z$  soddisfi la condizione  $z(a, t) = 0$ , o  $z_x(a, t) = 0$  per ogni  $0 \leq t \leq T$ , oltre a una analoga condizione in  $x = b$ . Vale allora per ogni  $0 \leq t \leq T$*

$$\int_a^b z(x, t)^2 dx \leq e^t \left\{ \int_a^b z(x, 0)^2 dx + \int_0^t \int_a^b F(x, \tau)^2 dx d\tau \right\}. \quad (6.12)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo limitarci al caso in cui  $z \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$ ; nel caso generale si ragiona come nella dimostrazione del Teorema 6.5.

Moltiplichiamo la (6.11) per  $z$ , e procediamo come nel Teorema 6.5. Si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_a^b z(x, t)^2 dx + D \iint_{Q_t} z_x(x, \tau)^2 dx d\tau \\ = \frac{1}{2} \int_a^b z(x, 0)^2 dx + \int_0^t \int_a^b F(x, \tau) z(x, \tau) dx d\tau, \end{aligned}$$

da cui, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$Fz \leq \frac{F^2}{2} + \frac{z^2}{2},$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b z(x, t)^2 dx \leq \int_a^b z(x, 0)^2 dx + \int_0^t \int_a^b F(x, \tau)^2 dx d\tau \\ + \int_0^t \int_a^b z(x, \tau)^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Definendo

$$y(t) = \int_0^t \int_a^b z(x, \tau)^2 dx d\tau,$$

la (6.13) implica la

$$y'(t) \leq K_0 + y(t), \quad 0 < t < T,$$

ove

$$K_0 = \int_a^b z(x, 0)^2 dx + \int_0^T \int_a^b F(x, \tau)^2 dx d\tau.$$

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 6.1, si arriva a

$$K_0 + y(t) \leq K_0 e^T \quad 0 < t < T. \quad (6.14)$$

Sostituendo la (6.14) nella (6.13) si ottiene infine la (6.12). Infatti il secondo estremo  $T$  nell'integrale di  $F^2$  può in realtà, nella dimostrazione, essere fissato ad arbitrio, per esempio uguale a  $\bar{t}$ , ragionando per  $0 < t < \bar{t}$ . In questo modo si perviene alla (6.12) scritta per  $t = \bar{t}$ , da cui appunto la tesi per l'arbitrarietà di  $\bar{t}$ .  $\square$

### 6.3. Equazione di Laplace

Sia  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  un aperto limitato e regolare; consideriamo soluzioni di

$$\Delta z = 0, \quad \text{in } \Omega. \quad (6.15)$$

TEOREMA 6.10. *Sia  $z \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  una soluzione di (6.15). Vale allora*

$$\int_{\Omega} |\nabla z(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} z \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma, \quad (6.16)$$

ove  $n$  è la normale esterna a  $\partial\Omega$ .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo prima che  $z \in C^2(\bar{\Omega})$ . Allora, un'applicazione del teorema della divergenza dà

$$0 = \int_{\Omega} z \Delta z d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} |\nabla z|^2 d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} z \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma.$$

Segue la tesi.

Resta da trattare il caso in cui  $z \notin C^2(\bar{\Omega})$ . Si applica il teorema della divergenza in un aperto regolare  $\Omega_\varepsilon$  che approssima  $\Omega$  dall'interno, in modo che  $\partial\Omega_\varepsilon$  converga a  $\partial\Omega$  per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Infatti essendo  $\bar{\Omega}_\varepsilon \subset \Omega$ , vale  $z \in C^2(\bar{\Omega}_\varepsilon)$ . Quindi si prende il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , sfruttando la regolarità di  $z$ . Vedere anche la dimostrazione del Teorema 6.5, ove si applica un'idea simile.  $\square$

Segue subito

COROLLARIO 6.11. *Sia  $z$  come in Teorema 6.10, e si abbia anche  $z(\mathbf{x}) = 0$ , o  $\frac{\partial z}{\partial n}(\mathbf{x}) = 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Vale allora*

$$\int_{\Omega} |\nabla z(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = 0. \quad (6.17)$$

OSSERVAZIONE 6.12. Le (6.5), (6.8) e (6.16) sono tutte uguaglianze, come le (6.6), (6.9) e (6.17). Tuttavia, in situazioni appena più generali, l'applicazione delle idee usate sopra conduce in effetti a disuguaglianze.

Per esempio, se  $z$  risolve  $z_t - Dz_{xx} \leq 0$  (e  $z \geq 0$ ), si può vedere che la (6.9) continua a valere in una versione ove il segno di uguaglianza è sostituito da  $\leq$ . La stessa cosa si può dire se  $z$  è una soluzione di (6.7), con condizioni al bordo  $Dz_x = \alpha z$  su  $x = a$ , e  $Dz_x = -\alpha z$  su  $x = b$ , con  $\alpha > 0$  (condizioni al contorno del terzo tipo).

Inoltre spesso si cercano, nel caso di problemi evolutivi, stime indipendenti dal tempo. Si dimostri che la (6.9) conduce a

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_a^b z(x, t)^2 dx + D \iint_{Q_T} z_x(x, t)^2 dx dt \leq \frac{3}{2} \int_a^b z(x, 0)^2 dx.$$

□

OSSERVAZIONE 6.13. Altre applicazioni del metodo dell'energia sono accennate nel Capitolo 18; vedi anche la Sottosezione 11.3.1. □

### 6.3.1. Applicazioni ai problemi al contorno.

TEOREMA 6.14. (UNICITÀ) *Siano  $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  entrambe soluzioni di  $\mathcal{PN}_L$ . Allora  $u_1 - u_2$  è costante in  $\Omega$ .*

*Se sono invece entrambe soluzioni di  $\mathcal{PD}_L$ , allora  $u_1 = u_2$ .*

DIMOSTRAZIONE. Si applica il Corollario 6.11, e si ottiene

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx = 0,$$

ossia che  $\nabla(u_1 - u_2) \equiv 0$  in  $\Omega$ , da cui  $u_1 - u_2$  costante in  $\Omega$ , essendo  $\Omega$  connesso.

Nel caso che  $u_1$  e  $u_2$  risolvano il problema di Neumann, non possiamo dire di più. Se tuttavia  $u_1$  e  $u_2$  risolvono il problema di Dirichlet, allora  $u_1 - u_2$  si annulla sulla frontiera  $\partial\Omega$ , e quindi deve essere nulla in tutto  $\Omega$ . □

## CAPITOLO 7

### Serie di Fourier

In questo capitolo le funzioni, salvo diverso avviso, sono sempre assunte essere in  $L^2(I)$  (vedi Sezione A.3). Dalla Sezione 7.5 in poi,  $I$  sarà un intervallo limitato della retta reale. Identificheremo due funzioni  $f$  e  $g$  uguali quasi ovunque, ossia tali che

$$\int_I |f(x) - g(x)|^2 dx = 0.$$

#### 7.1. Prodotto scalare di funzioni

DEFINIZIONE 7.1. Il prodotto scalare di due funzioni  $f$  e  $g$  è definito da

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x) dx.$$

La norma di una funzione  $f$  è

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_I f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Questa norma si dice anche la norma di  $f$  in  $L^2(I)$ , o norma  $L^2$  di  $f$  (vedi Appendice A).

Infine si definisce distanza di  $f$  e  $g$  la quantità

$$\|f - g\| = \left( \int_I |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

□

Il prodotto scalare gode delle elementari proprietà del prodotto scalare tra vettori:

$$\begin{aligned} (f, g) &= (g, f) && \text{(simmetria),} \\ (c_1 f_1 + c_2 f_2, g) &= c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g) && \text{(linearità),} \\ (f, f) &\geq 0, \text{ e } (f, f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0 && \text{(positività).} \end{aligned}$$

Qui le  $c_i$  sono costanti reali.

OSSERVAZIONE 7.2. L'implicazione presente nella proprietà di positività va intesa nel senso delle osservazioni all'inizio del Capitolo. □

Due proprietà ancora elementari, ma che richiedono una dimostrazione, sono contenute nel seguente lemma.

LEMMA 7.3. *Valgono la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|, \quad (7.1)$$

e la disuguaglianza triangolare

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (7.2)$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione usa solo le proprietà elementari viste sopra. Per dimostrare entrambe le disuguaglianze possiamo assumere che sia  $f$  che  $g$  non siano identicamente nulle, altrimenti la tesi è ovvia.

Anzitutto si ha

$$0 \leq (f - g, f - g) = \|f\|^2 - 2(f, g) + \|g\|^2, \quad (7.3)$$

da cui

$$|(f, g)| \leq \frac{1}{2} (\|f\|^2 + \|g\|^2) \quad (7.4)$$

(per ottenere il valore assoluto cambiare  $f$  in  $-f$ ). Applichiamo questa disuguaglianza a  $f/\|f\|$ ,  $g/\|g\|$ , ottenendo

$$\frac{1}{\|f\| \|g\|} |(f, g)| \leq \frac{1}{2} \left( \left\| \frac{f}{\|f\|} \right\|^2 + \left\| \frac{g}{\|g\|} \right\|^2 \right) = \frac{1+1}{2} = 1;$$

la (7.1) segue subito.

Poi si ha, usando (7.1),

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2, \end{aligned}$$

ossia la (7.2).  $\square$

OSSERVAZIONE 7.4. Per le definizioni di norma e prodotto scalare, la disuguaglianza (7.1) coincide con

$$\left| \int_I f(x)g(x) \, dx \right| \leq \left( \int_I f(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_I g(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.5)$$

In particolare, se  $I$  è limitato,

$$\int_I |f(x)| \, dx \leq (\text{lunghezza}(I))^{\frac{1}{2}} \left( \int_I f(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.6)$$

$\square$

OSSERVAZIONE 7.5. L'idea (7.3) è esattamente la stessa che si applica per dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per numeri reali  $\alpha, \beta$ :

$$0 \leq (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2, \quad (7.7)$$

che implica

$$\alpha\beta = \sqrt{\varepsilon}\alpha \times \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \varepsilon \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2\varepsilon}, \quad (7.8)$$

per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  e  $\varepsilon > 0$ .  $\square$

COROLLARIO 7.6. *Vale*

$$\left| \|f\| - \|g\| \right| \leq \|f - g\|. \quad (7.9)$$

DIMOSTRAZIONE. Usando la (7.2)

$$\|f\| \leq \|f - g\| + \|g\|, \quad \|g\| \leq \|f - g\| + \|f\|,$$

da cui

$$-\|f - g\| \leq \|f\| - \|g\| \leq \|f - g\|,$$

ossia la (7.9).  $\square$

Segue subito che la convergenza in  $L^2$  implica la convergenza delle norme:

COROLLARIO 7.7. *Se vale*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \quad (7.10)$$

*allora vale anche*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che, per il Corollario 7.6,

$$\left| \|f_n\| - \|f\| \right| \leq \|f_n - f\|.$$

$\square$

Un'altra osservazione importante è data dal seguente

COROLLARIO 7.8. *Se vale  $f_n \rightarrow f$  in  $L^2(I)$ , cioè se vale la (7.10), allora vale anche*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, g) = (f, g),$$

*per ogni  $g \in L^2(I)$ . In particolare, se la serie  $\sum F_n$  converge in  $L^2(I)$ , allora*

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} F_n, g \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n, g).$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$|(f_n, g) - (f, g)| = |(f_n - f, g)| \leq \|f_n - f\| \|g\| \rightarrow 0.$$

$\square$

## 7.2. Funzioni ortogonali. Sistemi ortonormali

DEFINIZIONE 7.9. Due funzioni  $f$  e  $g$  si dicono ortogonali se

$$(f, g) = \int_I f(x)g(x) dx = 0.$$

$\square$

PROPOSIZIONE 7.10. *Se le funzioni*

$$\{f_1, \dots, f_n\}$$

*sono ortogonali, e se ciascuna è non nulla, allora sono anche linearmente indipendenti.*

DIMOSTRAZIONE. Se vale

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i = 0, \quad c_i \in \mathbf{R},$$

segue, moltiplicando per  $f_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  fissato,

$$0 = \sum_{i=1}^n c_i (f_i, f_j) = c_j (f_j, f_j) = c_j \|f_j\|^2.$$

Dato che  $f_j \neq 0$  per ipotesi, segue che  $c_j = 0$ , per ogni  $j \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

COROLLARIO 7.11. *Lo spazio  $L^2(I)$  ha dimensione infinita come spazio vettoriale.*

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo considerare solo il caso in cui  $I$  è limitato, e, inoltre, solo il caso in cui  $I = (-\pi, \pi)$ , al quale ci possiamo sempre ricondurre con opportune trasformazioni lineari affini di coordinate. Si consideri allora la successione  $f_n(x) = \cos(nx)$ , per  $n \geq 1$ . Si verifica subito che questa successione è ortogonale; quindi costituisce un sistema infinito di funzioni linearmente indipendenti, per la Proposizione 7.10.  $\square$

DEFINIZIONE 7.12. Una successione (finita o infinita)  $\{\varphi_n\}$  di funzioni si dice un sistema ortonormale se per ogni scelta di  $n$  e  $m$  vale

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \quad (7.11)$$

$\square$

La seguente Proposizione è in un certo senso un'inversa della Proposizione 7.10.

PROPOSIZIONE 7.13. (GRAM-SCHMIDT) *Sia  $V \subset L^2(I)$  generato da una successione (finita o no) di funzioni linearmente indipendenti  $\{f_n\}$ . Allora  $V$  è anche generato dal sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}$  (con lo stesso numero di elementi di  $\{f_n\}$ ) definito da*

$$\varphi_n = \frac{\psi_n}{\|\psi_n\|}, \quad n \geq 1, \quad (7.12)$$

ove

$$\psi_1 = f_1, \quad \psi_n = f_n - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, \varphi_i) \varphi_i, \quad n \geq 2. \quad (7.13)$$

DIMOSTRAZIONE. A) Dato che ciascun  $\psi_n$  è definito come combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli delle  $f_i$ , non può essere 0, e quindi le  $\varphi_n$  sono ben definite (e in numero uguale alle  $f_n$  per costruzione). L'ortonormalità del sistema  $\{\varphi_n\}$  si verifica subito in modo diretto.

B) Sia  $U$  il sottospazio di  $L^2(I)$  generato dai  $\varphi_n$ . Dato che ciascun  $\varphi_n$  è combinazione lineare delle  $f_i$ , risulta ovvio che  $U \subset V$ . Viceversa, ciascuna  $f_k$  risulta combinazione lineare delle  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ , per la (7.13), e quindi vale anche  $V \subset U$ .  $\square$

Il procedimento che conduce dall'assegnata successione  $\{f_n\}$  al sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}$  si dice *procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*.

ESEMPIO 7.14. (POLINOMI DI LEGENDRE) Applicando il procedimento di Gram-Schmidt alla successione  $\{x^n\}_{n=0}^\infty$  in  $(-1, 1)$  si ottiene la successione dei *polinomi di Legendre*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n! \sqrt{n + \frac{1}{2}}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.14)$$

□

### 7.3. Approssimazione di funzioni con sistemi ortonormali

Sia  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  un sistema ortonormale. Fissiamo una funzione  $f$ . Per ogni assegnato  $k > 0$  naturale, vogliamo trovare la migliore approssimazione di  $f$  con combinazioni lineari di  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ . In altre parole, vogliamo minimizzare la funzione

$$\Psi(c_1, c_2, \dots, c_k) = \left\| f - \sum_{n=1}^k c_n \varphi_n \right\|^2 = \int_I \left| f(x) - \sum_{n=1}^k c_n \varphi_n(x) \right|^2 dx,$$

al variare dei parametri reali  $c_n$ .

Un calcolo esplicito, che usa (7.11), dà

$$\Psi(c_1, c_2, \dots, c_k) = \|f\|^2 - 2 \sum_{n=1}^k c_n (f, \varphi_n) + \sum_{n=1}^k c_n^2. \quad (7.15)$$

Dunque il minimo di  $\Psi$  si ottiene per

$$c_n = (f, \varphi_n), \quad n = 1, \dots, k. \quad (7.16)$$

DEFINIZIONE 7.15. La funzione

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k (f, \varphi_n) \varphi_n(x), \quad x \in I.$$

si dice *somma parziale di  $f$  relativa al sistema  $\{\varphi_n\}$* . □

Lo spazio  $L^2(I)$  è uno spazio vettoriale; lo spazio delle combinazioni lineari di  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ , è un suo sottospazio vettoriale  $V_k$ . La funzione  $S_k$  è quindi l'elemento di  $V_k$  più vicino a  $f$  nel senso della distanza tra funzioni sopra definita. Per questo si chiama a volte la *proiezione* di  $f$  su  $V_k$ .

Dato che per ogni  $k$  vale (per (7.15), (7.16))

$$0 \leq (f - S_k, f - S_k) = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^k (f, \varphi_n)^2, \quad (7.17)$$

si ha

LEMMA 7.16. *La serie  $\sum (f, \varphi_n)^2$  è convergente, e vale la disuguaglianza di Bessel*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 \leq \|f\|^2. \quad (7.18)$$

PROPOSIZIONE 7.17. *Se una stessa funzione  $f \in L^2(I)$  ha due sviluppi in serie*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n,$$

allora  $\alpha_n = \beta_n$  per ogni  $n \geq 1$ .

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Corollario 7.8:

$$\alpha_k = \left( \varphi_k, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \right) = \left( \varphi_k, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi_n \right) = \beta_k.$$

□

**7.3.1. Convergenza di sistemi ortonormali.** Sia  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  un sistema ortonormale. Certo  $\varphi_n$  non può convergere nel senso di  $L^2(I)$  (vedi Sottosezione A.3.1), perché altrimenti la successione  $\varphi_n$  sarebbe di Cauchy nella norma  $\|\cdot\|$ , mentre

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = (\varphi_n, \varphi_n) - 2(\varphi_n, \varphi_m) + (\varphi_m, \varphi_m) = 2 \not\rightarrow 0.$$

Invece, un qualunque sistema ortonormale infinito converge debolmente a zero: infatti per ogni  $f \in L^2(I)$ ,

$$\left| \int_I f(x) \varphi_n(x) dx \right| = |(f, \varphi_n)| \rightarrow 0;$$

l'ultima relazione di limite è un'ovvia conseguenza della disuguaglianza di Bessel.

#### 7.4. Sistemi ortonormali completi

DEFINIZIONE 7.18. Un sistema ortonormale si dice completo se e solo se, per ogni  $f$ , vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - S_k\| = 0. \quad (7.19)$$

□

Dalla (7.17) segue subito

PROPOSIZIONE 7.19. Il sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  è completo se e solo se per ogni  $f$  vale l'identità di Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2. \quad (7.20)$$

Questa Proposizione è l'analogo, nello spazio delle funzioni, del teorema di Pitagora.

Diamo altri criteri di completezza di un sistema ortonormale.

COROLLARIO 7.20. A) Se il sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  è completo, e se

$$(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n)$$

per ogni  $n \geq 1$ , allora  $f = g$ .

B) Viceversa, assegnato il sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , se

$$(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n), \quad \text{per ogni } n \geq 1 \quad \implies \quad f = g,$$

allora il sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  è completo.

DIMOSTRAZIONE. A) Si ha infatti, se  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  è completo,

$$\|f - g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (f - g, \varphi_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} [(f, \varphi_n) - (g, \varphi_n)]^2 = 0.$$

B) Per  $f$  fissata ad arbitrio, definiamo

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i.$$

È chiaro che, per l'ortonormalità del sistema,

$$(g, \varphi_n) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) (\varphi_i, \varphi_n) = (f, \varphi_n).$$

Quindi per l'ipotesi

$$f = g = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i,$$

ossia vale la (7.19). □

Questo risultato si può mettere in forma un po' diversa: basta controllare il caso  $g = 0$ .

**COROLLARIO 7.21.** A) Se il sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  è completo, e se

$$(f, \varphi_n) = 0$$

per ogni  $n \geq 1$ , allora  $f = 0$ .

B) Viceversa, assegnato il sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , se

$$(f, \varphi_n) = 0, \quad \text{per ogni } n \geq 1 \quad \implies \quad f = 0,$$

allora il sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  è completo.

**DIMOSTRAZIONE.** A) Segue subito dalla prima parte del Corollario 7.20.

B) Scegliamo  $g_1$  e  $g_2$  ad arbitrio, e poniamo  $f = g_1 - g_2$ . Assumiamo che valga  $(g_1, \varphi_n) = (g_2, \varphi_n)$  per ogni  $n \geq 1$ . Allora  $(f, \varphi_n) = 0$  per ogni  $n \geq 1$ , e per l'ipotesi del presente enunciato, deve valere  $f = 0$ . Ma questo implica che  $g_1 = g_2$ , e quindi abbiamo verificato le ipotesi della seconda parte del Corollario 7.20. Ne segue che il sistema  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  è completo. □

**COROLLARIO 7.22.** Il sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  è completo se e solo se per ogni  $f, g$  vale l'identità

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)(g, \varphi_n). \quad (7.21)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La (7.21) implica subito la (7.20), e dunque la completezza del sistema, per la Proposizione 7.19. Se viceversa vale la (7.20), si ha

$$\begin{aligned} 4(f, g) &= (f + g, f + g) - (f - g, f - g) = \sum_{n=1}^{\infty} \{(f + g, \varphi_n)^2 - (f - g, \varphi_n)^2\} \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)(g, \varphi_n). \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 7.23. Per un qualunque sistema ortonormale, anche non completo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n$$

ha comunque un limite in  $L^2(I)$  (vedi Sottosezione A.3.1). Stante la completezza dello spazio  $L^2(I)$ , basta dimostrare che la successione delle ridotte è di Cauchy in  $L^2(I)$ . Infatti per  $k > h$ :

$$\|S_k - S_h\|^2 = \left\| \sum_{n=h+1}^k (f, \varphi_n) \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=h+1}^k (f, \varphi_n)^2 \rightarrow 0,$$

se  $h \rightarrow \infty$ , per la disuguaglianza di Bessel. Il sistema  $\varphi_n$  è completo se questo limite è proprio  $f$ .  $\square$

### 7.5. Serie di Fourier in $(-\pi, \pi)$

Consideriamo in questa Sezione e nella successiva funzioni in  $L^2((-\pi, \pi))$ , che supponiamo sempre estese, per periodicità, a tutto  $\mathbf{R}$ .

Consideriamo il sistema di funzioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \dots \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \dots \end{aligned}$$

Questo è detto *sistema di Fourier*. È facile verificare con calcoli elementari che questo sistema è ortonormale, ossia che, scelte due funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  qualunque in esso, si ha

$$(\varphi, \psi) = 1, \quad \text{se } \varphi = \psi; \quad (\varphi, \psi) = 0, \quad \text{se } \varphi \neq \psi.$$

È più complesso dimostrare che

TEOREMA 7.24. *Il sistema di Fourier è un sistema ortonormale completo.*

La dimostrazione verrà data nel Capitolo 8.

Introduciamo il classico simbolismo

$$S_k(x) = a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad (7.22)$$

ove, per ogni  $n \geq 1$ ,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Si noti che si pone  $S_0(x) = a_0$ . La  $S_k$  coincide con l'analoga sommatoria introdotta sopra per sistemi ortonormali generali, a meno di una ridefinizione di  $k$ . In particolare

$$\|f - S_k\| = \min \left\{ \|f - \Sigma_k\| \mid \Sigma_k \in F_k \right\}, \quad (7.23)$$

ove  $F_k$  denota l'insieme di tutte le combinazioni lineari di 1 e di  $\sin(nx)$ ,  $\cos(nx)$ , con  $1 \leq n \leq k$ .

### 7.6. Serie di soli seni o soli coseni

Vedremo nelle Sezioni successive che per la risoluzione di problemi al contorno per e.d.p. è importante avere a disposizione sistemi ortonormali che soddisfano certe condizioni negli estremi dell'intervallo ove sono definiti. Da questo punto di vista il sistema di Fourier non risulta comodo, perchè i suoi componenti non hanno un comportamento ben definito in questo senso.

Consideriamo i due sistemi di funzioni in  $(0, \pi)$ :

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx) \mid n \geq 1 \right\},$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \mid n \geq 1 \right\}.$$

Un calcolo elementare mostra che ciascuno dei due sistemi è ortonormale in  $(0, \pi)$ . Gli sviluppi in serie relativi a  $\mathcal{C}$  e a  $\mathcal{S}$  sono, rispettivamente,

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx), \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad \alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (7.24)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx), \quad \beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \quad (7.25)$$

**TEOREMA 7.25.** *Ciascuno dei due sistemi ortonormali  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{S}$  è completo in  $(0, \pi)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta svolgere le dimostrazioni per  $\mathcal{S}$ , il caso di  $\mathcal{C}$  essendo del tutto analogo. Sia  $g : (0, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ . Estendiamola in modo dispari a  $(-\pi, \pi)$  (si noti che si può sempre assumere  $g(0) = 0$ , per le osservazioni all'inizio del Capitolo). Denotiamo con  $f$  questa estensione, e costruiamone la serie di Fourier, come visto nella Sezione 7.5. Essendo  $f$  dispari, i coefficienti  $a_n$  relativi alla proiezione sui coseni sono tutti nulli. Per lo stesso motivo, i coefficienti  $b_n$  si calcolano come

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \beta_n,$$

ove  $\beta_n$ , definito in (7.25), è proprio il coefficiente relativo all' $n$ -esima funzione di  $\mathcal{S}$ .

Dunque: le somme parziali  $\tilde{S}_k$  di  $g$ , relative a  $\mathcal{S}$ , si riducono a quelle  $S_k$  di  $f$ , relative al sistema di Fourier. Per cui

$$\int_0^{\pi} |g(x) - \tilde{S}_k(x)|^2 dx = \int_0^{\pi} |f(x) - S_k(x)|^2 dx$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_k(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Ne segue che  $\mathcal{S}$  è completo in  $(0, \pi)$ , in base alla Definizione 7.18.  $\square$

Tutte le funzioni  $\varphi \in \mathcal{S}$  soddisfano

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0, \quad (7.26)$$

mentre per tutte le  $\psi \in \mathcal{C}$  vale

$$\psi'(0) = \psi'(\pi) = 0. \quad (7.27)$$

Condizioni al bordo di tipo misto (vedi le (7.30), (7.31)) possono essere ottenute considerando i due sistemi in  $L^2((0, \pi/2))$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}} &= \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos((2n+1)x) \mid n \geq 0 \right\}, \\ \tilde{\mathcal{S}} &= \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin((2n+1)x) \mid n \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Un calcolo elementare mostra che ciascuno dei due sistemi è ortonormale in  $(0, \pi/2)$ . Gli sviluppi in serie relativi a  $\tilde{\mathcal{C}}$  e a  $\tilde{\mathcal{S}}$  sono, rispettivamente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_n \cos(2n+1)x, \quad \tilde{\alpha}_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos(2n+1)x \, dx, \quad (7.28)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\beta}_n \sin(2n+1)x, \quad \tilde{\beta}_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \sin(2n+1)x \, dx. \quad (7.29)$$

**TEOREMA 7.26.** *Ciascuno dei due sistemi ortonormali  $\tilde{\mathcal{C}}$  e  $\tilde{\mathcal{S}}$  è completo in  $(0, \pi/2)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Basta svolgere le dimostrazioni per  $\tilde{\mathcal{C}}$ , il caso di  $\tilde{\mathcal{S}}$  essendo del tutto analogo. Sia  $g : (0, \pi/2) \rightarrow \mathbf{R}$ . Estendiamola a tutto  $(0, \pi)$  in modo dispari intorno a  $\pi/2$ . Denotiamo con  $f$  questa estensione, e costruiamone la serie di soli coseni. Essendo  $f$  dispari intorno a  $\pi/2$ , il coefficiente  $\alpha_0$  si annulla. Per lo stesso motivo, i coefficienti  $\alpha_h$ ,  $h \geq 1$ , si calcolano come

$$\begin{aligned} \alpha_h &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(hx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x) \cos(hx) \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \cos(hx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(x) \cos(hx) \, dx - \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} g(\pi-x) \cos(hx) \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(x) \cos(hx) \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(y) \cos(h\pi - hy) \, dy \\ &= [1 - (-1)^h] \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} g(x) \cos(hx) \, dx = \begin{cases} 0, & h = 2n, \\ \tilde{\alpha}_n, & h = 2n+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque: le somme parziali  $\tilde{S}_k$  di  $g$ , relative a  $\tilde{\mathcal{C}}$ , si riducono a quelle  $S_k$  di  $f$ , relative al sistema di coseni. Per cui

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(x) - \tilde{S}_k(x)|^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x) - S_k(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^{\pi} |f(x) - S_k(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ne segue che  $\tilde{\mathcal{C}}$  è completo in  $(0, \pi/2)$ , in base alla Definizione 7.18.  $\square$

Tutte le funzioni  $\varphi \in \tilde{\mathcal{S}}$  soddisfano

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (7.30)$$

mentre per tutte le  $\psi \in \tilde{\mathcal{C}}$  vale

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (7.31)$$

### 7.7. Altri intervalli

Sia  $(a, b)$  un qualunque intervallo limitato, e sia  $f$  in  $L^2((a, b))$ . Possiamo ricondurci al caso di una funzione  $g$  definita su  $(c, d)$  mediante cambiamenti di variabile del tipo

$$\xi = \alpha x + \beta, \quad a < x < b, \quad g(\xi) = f\left(\frac{\xi - \beta}{\alpha}\right), \quad c < \xi < d.$$

Qui  $\alpha$  e  $\beta$  sono costanti reali, date da

$$\alpha = \frac{d - c}{b - a}, \quad \beta = \frac{bc - ad}{b - a}.$$

La  $g$  ha uno sviluppo in serie nel sistema ortonormale prescelto (nella variabile  $\xi$ ), che dà luogo a uno sviluppo per  $f$  quando vi si sostituisca  $\xi = \alpha x + \beta$ . Sia  $\{\varphi_n\}$  un sistema ortonormale in  $L^2((c, d))$ . Allora

$$\psi_n(x) = \sqrt{\alpha} \varphi_n(\alpha x + \beta)$$

è un sistema ortonormale in  $L^2((a, b))$ .

Più in particolare si ha quanto segue.

Riconducendosi al caso del sistema di Fourier in  $(-\pi, \pi)$  si ottiene il sistema ortonormale completo in  $(a, b)$ :

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos(n(\alpha x + \beta)), \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin(n(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 1.$$

Qui

$$\alpha = \frac{2\pi}{b-a}, \quad \beta = -\frac{b+a}{b-a}\pi.$$

Il sistema di soli coseni in  $(0, \pi)$  dà luogo al sistema

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos(n(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 1,$$

ove

$$\alpha = \frac{\pi}{b-a}, \quad \beta = -\frac{a}{b-a}\pi. \quad (7.32)$$

Nello stesso modo, il sistema di soli seni in  $(0, \pi)$  dà luogo a

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin(n(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 1,$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  come in (7.32).

Il sistema  $\tilde{\mathcal{C}}$  in  $(0, \pi/2)$  dà luogo al sistema

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos((2n+1)(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 0,$$

ove

$$\alpha = \frac{\pi}{2(b-a)}, \quad \beta = -\frac{a}{2(b-a)}\pi. \quad (7.33)$$

Nello stesso modo, il sistema  $\tilde{\mathcal{S}}$  in  $(0, \pi/2)$  dà luogo a

$$\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin((2n+1)(\alpha x + \beta)), \quad n \geq 0,$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  come in (7.33).

### 7.8. Espansioni in serie di Fourier di funzioni di più variabili

La teoria generale delle espansioni di funzioni in sistemi ortonormali è valida anche per funzioni di più variabili, ad esempio definite in un sottoinsieme del piano  $\mathbf{R}^2$  invece che in un intervallo di  $\mathbf{R}$ . In questo caso, anche le funzioni del sistema ortonormale dipenderanno da due variabili.

In questa sezione diamo però un esempio di un argomento diverso, ossia dell'espansione di funzioni di due variabili reali in sistemi ortonormali, *quando una delle due variabili venga considerata un parametro*. Sia per esempio

$$u : (x, t) \mapsto u(x, t), \quad (x, t) \in Q = [0, \pi] \times [0, \infty),$$

$u \in C(Q)$ . Sviluppiamo per ogni  $t$  fissato la funzione  $u(\cdot, t)$  nel sistema dei seni  $\mathcal{S}$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \sin(nx).$$

Si noti che ora i coefficienti  $\beta_n$  dipendono da  $t$ , visto che la funzione sviluppata dipende da  $t$ : per definizione

$$\beta_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x, t) \sin(nx) \, dx.$$

ESEMPIO 7.27. La funzione

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x,$$

ha come è ovvio uno sviluppo in  $\mathcal{S}$  con coefficienti

$$\beta_1(t) = e^{-t}; \quad \beta_n(t) = 0, \quad n \geq 2.$$

È chiaro che la stessa funzione può essere sviluppata in altri sistemi ortonormali, per esempio  $\mathcal{C}$ : con i calcoli usuali si ottiene

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} e^{-t} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi} e^{-t} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2 - 1} \cos(nx).$$

□

**7.9. Serie di Fourier in forma complessa**

Sia  $f \in L^2((-\pi, \pi))$ , e consideriamo per ogni  $k \geq 1$  la somma parziale della sua serie di Fourier

$$\begin{aligned} S_k(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^k \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx}. \end{aligned}$$

Ponendo dunque

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0, & c_m &= \frac{a_m - ib_m}{2}, & m > 0, \\ c_m &= \overline{c_{-m}} = \frac{a_{-m} + ib_{-m}}{2}, & m < 0, \end{aligned}$$

si ottiene

$$S_k(x) = \sum_{m=-k}^k c_m e^{imx}. \quad (7.34)$$

Si può quindi scrivere

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx},$$

con l'avvertenza che il limite della serie, oltre a dover essere inteso nel senso di  $L^2((-\pi, \pi))$ , deve essere preso sulla successione delle somme parziali simmetriche come in (7.34).



## Convergenza delle serie di Fourier

### 8.1. Le somme di Fejer

TEOREMA 8.1. *Le medie aritmetiche*

$$T_k(x) = \frac{1}{k+1} (S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_k(x)), \quad (8.1)$$

soddisfano, se  $f$  è limitata su  $\mathbf{R}$  e periodica di periodo  $2\pi$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(x) = f(x), \quad (8.2)$$

in ogni punto di continuità  $x$  di  $f$ .

Inoltre la convergenza è uniforme in intervalli compatti di continuità di  $f$ .

Le somme  $T_k$  si dicono somme di Fejer, dal nome del matematico che le introdusse. Si noti che *non è in genere vero* che anche le  $S_k$  abbiano le proprietà di convergenza dell'enunciato del Teorema 8.1. Tuttavia le  $S_k$  forniscono un'approssimazione *migliore* delle  $T_k$  nel senso della distanza  $\|\cdot\|$ , come espresso dalla (7.23). Si noti a questo proposito che in effetti  $T_k \in F_k$ .

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione (7.22), si ha per  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos(ny) \cos(nx) + \sin(ny) \sin(nx) \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos n(y-x) \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}(y-x)\right)}{\sin\frac{y-x}{2}} dy. \end{aligned}$$

Qui si è usata la (C.1). Per la periodicità dell'integrando si può anche scrivere

$$S_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}y\right)}{\sin\frac{y}{2}} dy; \quad (8.3)$$

Si noti che questa rappresentazione vale di fatto anche per  $S_0(x) = a_0$ . Dunque, per definizione di  $T_k$ , si ha, usando anche la (C.3),

$$\begin{aligned} T_k(x) &= \frac{1}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) \sum_{n=0}^k \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}y\right)}{\sin\frac{y}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(y+x) \left(\frac{\sin\frac{k+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2 dy, \end{aligned}$$

ossia (cambiando  $y$  in  $-y$ )

$$T_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\phi_k(y) dy = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\phi_k(y) dy, \quad (8.4)$$

ove  $\phi_k$  è il nucleo di Fejer

$$\phi_k(x) = \frac{1}{2\pi(k+1)} \left(\frac{\sin\frac{k+1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}}\right)^2, \quad |x| \leq \pi; \quad \phi_k(x) = 0, \quad |x| > \pi. \quad (8.5)$$

Dimostriamo che  $\phi_k$  soddisfa le (11.2), (11.4) (vedi anche l'Osservazione 11.14). Si ha per definizione che  $\phi_k \geq 0$ . Inoltre, se si sceglie  $f \equiv 1$  (ossia  $f$  è una delle funzioni del sistema di Fourier) vale  $a_0 = 1$ ,  $a_n = b_n = 0$  per  $n \geq 1$ , e dunque

$$\int_{\mathbf{R}} \phi_k(y) dy = T_k(x) = \frac{1}{k+1} (1 + 1 + \dots + 1) = 1,$$

dimostrando anche la seconda delle (11.2). Per dimostrare (11.4) fissiamo  $\pi > a > 0$ ; per le usuali proprietà della funzione seno, si ha

$$\int_a^{\pi} \phi_k(x) dx \leq \frac{1}{2\pi(k+1)} \int_a^{\pi} \frac{1}{\sin^2\frac{a}{2}} dy = \frac{\pi - a}{2\pi(k+1)\sin^2\frac{a}{2}} \rightarrow 0,$$

per  $k \rightarrow \infty$ . Possiamo quindi applicare i risultati del Teorema 11.3 in un punto di continuità, o del Corollario 11.5 su un qualsiasi intervallo compatto di continuità. Questo dà subito la tesi.  $\square$

In genere *non* è vero che la successione  $S_k(x)$  converge a  $f(x)$  in un punto di continuità di  $f$ . Vale però

**TEOREMA 8.2.** *Sia  $f$  una funzione periodica in  $\mathbf{R}$ , di periodo  $2\pi$ , con  $f \in L^2((-\pi, \pi))$ . Se per un fissato  $x \in \mathbf{R}$  vale*

$$|f(y) - f(x)| \leq C|x-y|^\alpha, \quad \text{per ogni } y \text{ tale che } |x-y| < \gamma, \quad (8.6)$$

ove  $C$ ,  $\gamma$ , e  $\alpha$  sono costanti positive, allora la serie di Fourier di  $f$  converge a  $f(x)$  in  $x$ , ossia  $S_k(x) \rightarrow f(x)$ .

Se la (8.6) vale per ogni  $x \in J$ , ove  $J$  è un intervallo compatto, con  $C$ ,  $\gamma$ , e  $\alpha$  indipendenti da  $x \in J$ , la convergenza è uniforme in  $J$ .

(Omettiamo la dimostrazione del Teorema 8.2.)

Per esempio se  $f \in C^1((a, b))$ , e  $J \subset (a, b)$  è compatto, allora in  $J$  valgono le ipotesi del teorema, e quindi

$$\max_{x \in J} |S_k(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

## 8.2. Completezza del sistema di Fourier

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 7.24. A) Sia  $g \in L^2((-\pi, \pi))$ . Dobbiamo dimostrare che

$$g(x) = a_0^g + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^g \cos(nx) + b_n^g \sin(nx), \quad (8.7)$$

nel senso di  $L^2((-\pi, \pi))$ . Qui  $a_n^g, b_n^g$  denotano i coefficienti di Fourier di  $g$ . Iniziamo con il ricordare che la serie in (8.7) converge certamente nel senso di  $L^2((-\pi, \pi))$ , a una funzione  $h \in L^2((-\pi, \pi))$  (Osservazione 7.23). Si tratta dunque di dimostrare che  $h = g$ .

In particolare, scambiando serie e integrale per il Corollario 7.8, e integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^x [h(s) - a_0^g] ds &= \int_{-\pi}^x \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^g \cos(ns) + b_n^g \sin(ns) \right] ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^x [a_n^g \cos(ns) + b_n^g \sin(ns)] ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n^g}{n} \sin(nx) - \frac{b_n^g}{n} \cos(nx) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n^g}{n}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

B) Definiamo

$$f(x) = \int_{-\pi}^x [g(s) - a_0] ds, \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (8.9)$$

La  $f$  risulta una funzione continua su  $[-\pi, \pi]$ , con  $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ . Dunque è estendibile in modo periodico a  $\mathbf{R}$ , con periodo  $2\pi$ , come funzione continua. Denotiamo ancora con  $f$  questa estensione.

Applichiamo a  $f$  il Teorema 8.1: questo garantisce che la successione  $\{T_k^f\}$  relativa a  $f$  converge uniformemente a  $f$  su  $[-\pi, \pi]$ , e quindi anche nel senso di  $L^2((-\pi, \pi))$ .

Per la definizione della  $S_k^f$ , e poiché  $T_k^f \in F_k$ , ove  $F_k$  è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di 1 e di  $\sin(nx), \cos(nx)$   $1 \leq n \leq k$ , vale

$$\|f - S_k^f\| = \min \{ \|f - \Sigma_k\| \mid \Sigma_k \in F_k \} \leq \|f - T_k^f\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Quindi  $S_k^f \rightarrow f$ , ossia la serie di Fourier di  $f$  converge nel senso di  $L^2((-\pi, \pi))$  a  $f$ .

C) Troviamo i coefficienti di Fourier di  $f$ : per esempio se  $n \geq 1$ , si ha integrando per parti,

$$b_n^f = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^x [g(s) - a_0] ds \right] \sin(nx) dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx = \frac{a_n^g}{n}.$$

In modo simile si calcola che

$$a_0^f = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)x dx, \quad a_n^f = -\frac{b_n^g}{n}, \quad n \geq 1.$$

Si ha quindi nel senso di  $L^2$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0^f + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{b_n^g}{n} \cos(nx) + \frac{a_n^g}{n} \sin(nx) \right] \\ &= a_0^f - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n^g}{n} + \int_{-\pi}^x [h(s) - a_0^g] ds. \quad (8.10) \end{aligned}$$

Dato che  $f(-\pi) = 0$ , si deve avere

$$a_0^f = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)x dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n^g}{n}.$$

Da (8.2) e da (8.10) segue

$$\int_{-\pi}^x g(s) ds = \int_{-\pi}^x h(s) ds, \quad -\pi < x < \pi,$$

da cui  $h = g$  come richiesto.  $\square$

### 8.3. Sviluppi di funzioni regolari

La completezza di un sistema ortonormale garantisce solo la convergenza in  $L^2(I)$  dello sviluppo in serie corrispondente; dunque, a priori, neppure la convergenza q.o.. Tuttavia, se  $f$  ha regolarità aggiuntive, si può vedere che la convergenza della sua serie di Fourier migliora. In particolare vale

**TEOREMA 8.3.** *Sia  $f \in C^1([-\pi, \pi])$ ,  $f(-\pi) = f(\pi)$ . La  $f$  quindi si può considerare continua e periodica di periodo  $2\pi$  in  $\mathbf{R}$ . Allora la serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente su  $\mathbf{R}$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ -f(x) \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} [f(-\pi) - f(\pi)] (-1)^n n^{-1} + \frac{1}{n} a_n^{(1)} = \frac{1}{n} a_n^{(1)}, \end{aligned}$$

per la periodicità di  $f$ ; qui denotiamo con  $a_n^{(1)}$ ,  $b_n^{(1)}$  i coefficienti di Fourier di  $f'$ . Nello stesso modo si ottiene

$$a_n = -\frac{1}{n} b_n^{(1)}, \quad n \geq 1.$$

Per provare la tesi basta dimostrare che la serie resto tende a zero (in modo uniforme) per ogni  $x \in \mathbf{R}$ . In effetti per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ,  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right| &\leq \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| + |b_n| \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} |a_n^{(1)}| + \frac{1}{n} |b_n^{(1)}| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=k}^{\infty} (|a_n^{(1)}|^2 + |b_n^{(1)}|^2) < \infty, \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Bessel; si è usata anche la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz  $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ , valida per  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ .  $\square$

OSSERVAZIONE 8.4. In particolare dalla dimostrazione precedente e da un semplice ragionamento per induzione segue che se  $m \geq 1$  e  $f \in C^{m-1}(\mathbf{R}) \cap C^m([-\pi, \pi])$  è periodica di periodo  $2\pi$ , allora i coefficienti di Fourier di  $f^{(m)}$ ,  $a_n^{(m)}$ ,  $b_n^{(m)}$ , soddisfano (ponendo  $m = 2k + 1$ , o  $m = 2k$ ):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^{k+1}}{n^{2k+1}} b_n^{(2k+1)}, & b_n &= \frac{(-1)^k}{n^{2k+1}} a_n^{(2k+1)}, & n \geq 1, & a_0^{(2k+1)} = 0; \\ a_n &= \frac{(-1)^k}{n^{2k}} a_n^{(2k)}, & b_n &= \frac{(-1)^k}{n^{2k}} b_n^{(2k)}, & n \geq 1, & a_0^{(2k)} = 0; \end{aligned} \tag{8.11}$$

Quindi la serie di Fourier di  $f^{(m)}$  si ottiene proprio derivando  $m$  volte la serie di Fourier di  $f$ .  $\square$

OSSERVAZIONE 8.5. Il Teorema 8.3 vale in realtà per  $f \in C([-\pi, \pi])$ ,  $f(\pi) = f(-\pi)$  e  $f$  di classe  $C^1$  a tratti in  $[-\pi, \pi]$ . Si può ripetere la stessa dimostrazione, avendo l'accortezza di integrare per parti su ciascun subintervallo di regolarità.

In effetti il Teorema 8.3 vale per ogni funzione  $f$  che si può scrivere come

$$f(x) = f(-\pi) + \int_{-\pi}^x g(s) ds, \quad -\pi < x < \pi,$$

per una  $g \in L^2((-\pi, \pi))$ , tale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(s) ds = 0.$$

$\square$

OSSERVAZIONE 8.6. (SVILUPPI DI FUNZIONI MENO REGOLARI) Consideriamo i coefficienti, nel sistema ortonormale  $\mathcal{C}$  in  $L^2((0, \pi))$ , della funzione

$$f(x) = x^{-\alpha}, \quad 0 < x < \pi, \tag{8.12}$$

ove  $0 < \alpha < 1/2$ , ossia la successione

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^{-\alpha} \cos(nx) dx = n^{\alpha-1} \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} y^{-\alpha} \cos(y) dy. \tag{8.13}$$

Vale

$$\int_0^k y^{-\alpha} \cos(y) dy \rightarrow L > 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (8.14)$$

ove  $L = L(\alpha)$ ; vedi infatti Lemma C.13 per l'esistenza del limite; il fatto che  $L > 0$  segue dalle proprietà, in particolare anche dalla periodicità, del coseno. Pertanto, per  $n \geq n_0$  opportuno,

$$\frac{L}{\pi} n^{\alpha-1} \leq a_n \leq 4 \frac{L}{\pi} n^{\alpha-1}. \quad (8.15)$$

Si noti che al variare di  $\alpha \in (0, 1/2)$ , l'esponente di  $n$  nella serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{2(\alpha-1)},$$

prende tutti i valori in  $(-2, -1)$ , cioè fino al valore critico  $-1$  per la convergenza della serie: si rammenti che questa deve convergere per la disuguaglianza di Bessel.  $\square$

#### 8.4. Il fenomeno di Gibbs

Come ulteriore illustrazione delle modalità di convergenza delle serie di Fourier, consideriamo il cosiddetto *fenomeno di Gibbs*: questo consiste, in breve, nel fatto che nelle discontinuità di salto, la somma parziale  $S_k$  della serie di Fourier di certe funzioni *sovrastima* il salto della funzione approssimata con un errore che *non* tende a zero per  $k \rightarrow \infty$ ; si veda la Figura 8.1.

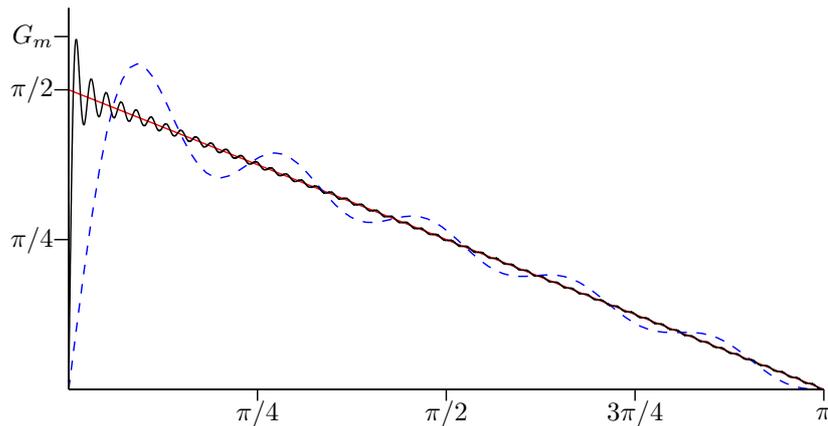


FIGURA 8.1. I grafici di  $f$  definita in (8.16), e di due sue somme di Fourier:  $S_{10}$  (linea tratteggiata) e  $S_{100}$  (linea continua).

Questo fenomeno appare in tutte le serie di funzioni regolari a tratti, che presentano discontinuità di salto. Dimostriamolo nel caso di una delle serie

più semplici:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi < x < 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 < x < \pi, \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx). \quad (8.16)$$

La  $f$  è dispari; è il caso di ripetere qui che l'uguaglianza precedente vale nel senso di  $L^2((-\pi, \pi))$ .

LEMMA 8.7. *La funzione*

$$G(x) = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz, \quad x \geq 0, \quad (8.17)$$

raggiunge il suo massimo assoluto in  $x = \pi$ , ove vale

$$G_m := G(\pi) = 1,85193\dots > \frac{\pi}{2} = 1,57079\dots \quad (8.18)$$

DIMOSTRAZIONE. Suggerimento: usare la periodicità della funzione seno (e l'integrazione numerica per calcolare  $G(\pi)$ ).  $\square$

TEOREMA 8.8. *I grafici delle somme parziali  $S_k$  di  $f$  si accumulano per  $k \rightarrow \infty$  sul segmento*

$$\{(0, y) \mid -G_m \leq y \leq G_m\} = \{0\} \times [-G_m, G_m],$$

ove  $G_m$  è stato definito nel Lemma 8.7. Vale a dire: per ogni  $y \in [-G_m, G_m]$  esiste una successione  $\{\varepsilon_k\}$  con  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , tale che  $S_k(\varepsilon_k) \rightarrow y$ .

L'essenziale di questo enunciato sta nel fatto che si ottengono come punti limite dei grafici di  $S_k$  anche quelli con ordinata

$$G_m \geq |y| > \frac{\pi}{2},$$

nonostante che

$$f(0+) = -f(0-) = \frac{\pi}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché sia  $f$  che  $S_k$  sono dispari, possiamo limitarci al caso  $y > 0$ ,  $\varepsilon_k > 0$ . Fissiamo  $p \in (0, \pi]$  tale che  $y = G(p)$ .

Scegliamo una (per ora) qualunque successione  $0 < \varepsilon_k < \pi$  decrescente a zero, e valutiamo

$$\begin{aligned} S_k(\varepsilon_k) &= \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \sin(n\varepsilon_k) = \int_0^{\varepsilon_k} \sum_{n=1}^k \cos(nx) dx \\ &= \int_0^{\varepsilon_k} \left[ \frac{\sin(k + \frac{1}{2})x}{2 \sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2} \right] dx, \end{aligned}$$

ove abbiamo usato la (C.1). Trasformiamo ancora l'espressione trovata per calcolarne il limite in modo più semplice:

$$S_k(\varepsilon_k) = \int_0^{\varepsilon_k} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})x}{x} dx + J_1(k) + J_2(k),$$

ove

$$J_1(k) = \int_0^{\varepsilon_k} \left[ \frac{1}{2 \sin \left( \frac{x}{2} \right)} - \frac{1}{x} \right] \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) x \, dx, \quad J_2(k) = -\frac{\varepsilon_k}{2}.$$

È immediato che  $J_2(k) \rightarrow 0$ ; vale anche  $J_1(k) \rightarrow 0$  perché l'integrando è limitato su  $(0, \pi)$  da una costante indipendente da  $k$  (la quantità in parentesi quadre tende a zero per  $x \rightarrow 0$ ). Quindi, cambiando variabile d'integrazione,

$$S_k(\varepsilon_k) = \int_0^{(k+\frac{1}{2})\varepsilon_k} \frac{\sin z}{z} \, dz + o(1).$$

Scegliamo ora

$$\varepsilon_k = \frac{p}{k + \frac{1}{2}},$$

per il  $p \in (0, \pi]$  tale che  $y = G(p)$ . Per questa scelta di  $\varepsilon_k$  si ha dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\varepsilon_k) = G(p) = \int_0^p \frac{\sin z}{z} \, dz,$$

ove  $G$  è la funzione definita nel Lemma 8.7. □

OSSERVAZIONE 8.9. Il fenomeno di Gibbs, ossia il Teorema 8.8, è un punto critico nell'approssimazione di funzioni con serie di Fourier; si veda, per confronto, l'Osservazione 11.7. D'altra parte, si deve osservare che:

- (1) La serie di  $f$  converge uniformemente in ogni intervallo  $[c, \pi]$ , per ogni fissato  $0 < c < \pi$ . Più in generale, la serie di Fourier di una funzione converge uniformemente alla sua somma sotto ipotesi di regolarità come, per esempio, quelle indicate nel Teorema 8.2 o nel Teorema 8.3.
- (2) L'approssimazione nella norma  $L^2((-\pi, \pi))$  vale invece per ogni funzione in questo spazio. Nel caso della  $f$ , si ha

$$\frac{\|S_{10} - f\|}{\|f\|} = \left( \frac{\pi \sum_{n=11}^{\infty} n^{-2}}{\frac{\pi^3}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0,241,$$

$$\frac{\|S_{100} - f\|}{\|f\|} = \left( \frac{\pi \sum_{n=101}^{\infty} n^{-2}}{\frac{\pi^3}{6}} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0,078.$$

□

## Il metodo di Fourier

### 9.1. Il metodo di Fourier: soluzione per serie

Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione delle onde

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < L, 0 < t, \quad (9.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t, \quad (9.2)$$

$$u(L, t) = 0, \quad 0 < t, \quad (9.3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (9.4)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L. \quad (9.5)$$

Non è detto in genere che, per esempio,

$$f(x) = X(x)T(0),$$

per qualcuna delle soluzioni a variabili separabili trovate nella Sezione 4.1. Si può però sperare di ottenere la soluzione come somma, o serie, di queste soluzioni elementari. In questo contesto, le  $c_i$ ,  $k_i$  dipenderanno da  $\lambda$ .

Imponiamo per prima cosa le condizioni sui bordi  $x = 0$ ,  $x = L$ . Questo significa che vogliamo  $X(0) = X(L) = 0$ . D'altra parte se da questo segue  $X \equiv 0$ , in pratica risulta inutile considerare la soluzione elementare (nulla) corrispondente, nella serie che esprimerà la soluzione al problema assegnato. È facile vedere che in effetti è proprio questo il caso se  $\lambda \leq 0$ .

Rimane la possibilità  $\lambda > 0$ , in cui imponiamo

$$X(0) = c_1 = 0, \quad (9.6)$$

$$X(L) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0, \quad (9.7)$$

richiedendo che  $X \neq 0$ . Deve dunque annullarsi  $\sin(\sqrt{\lambda}L)$ , il che equivale a

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad \text{ossia} \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad (9.8)$$

per  $n \geq 1$ .

Ci siamo fin qui ridotti a cercare soluzioni nella forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) \right]. \quad (9.9)$$

Ammettiamo, come qui facciamo, che la serie converga in modo tale da rendere la  $u$  regolare a sufficienza, e di poter derivare per serie, le condizioni (9.1), (9.2), (9.3) sono soddisfatte.

Restano da imporre le condizioni iniziali, ossia che

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (9.10)$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n\pi}{L} c \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (9.11)$$

Si tratta dunque di sviluppare  $f$  e  $g$  in serie di soli seni. Vogliamo che  $f$  e  $g$  si possano scegliere a piacere in  $L^2((0, L))$ . In altri termini, dobbiamo richiedere che ogni funzione in  $L^2((0, L))$  possa essere rappresentata come serie nella forma (9.10), o (9.11). Questo è in effetti possibile, visto che il sistema  $\sqrt{2/L} \sin(n\pi x/L)$  è completo in  $L^2((0, L))$ : invocando i risultati delle Sezioni 7.6, 7.7 si ha che lo sviluppo cercato è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

con

$$\beta_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}\xi\right) \sin(n\xi) d\xi = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

In altri termini, occorre e basta scegliere in (9.9), (9.10) le costanti  $C_n = \beta_n$ . In modo analogo si ragiona per  $g$ , determinando così anche le  $D_n$ .

**OSSERVAZIONE 9.1.** Il fatto che il sistema di soluzioni a variabili separate ottenute in (9.6)–(9.8) fosse un sistema ortonormale completo può apparire qui come un colpo di fortuna. In effetti è invece la conseguenza di una teoria abbastanza generale, detta *teoria di Sturm-Liouville*, che rende applicabile il metodo esemplificato in questa Sezione anche alle equazioni del calore e di Laplace, e perfino a e.d.p. più generali.

La teoria di Sturm-Liouville è accennata nel Capitolo 16.  $\square$

**OSSERVAZIONE 9.2.** Nel caso dell'equazione della corda vibrante, le soluzioni elementari ottenute sopra, cioè,

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ k_1 \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + k_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) \right],$$

si dicono anche *armoniche*, o *onde stazionarie*. La frequenza dell' $n$ -esima armonica è data da

$$\nu_n = c \frac{n\pi}{L} \frac{1}{2\pi} = \frac{cn}{2L},$$

e la sua lunghezza d'onda è

$$\frac{c}{\nu_n} = \frac{2L}{n}.$$

L'*armonica fondamentale* è data da ( $n = 1$ )

$$\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \left[ k_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}ct\right) + k_2 \sin\left(\frac{\pi}{L}ct\right) \right],$$

mentre le altre onde stazionarie si dicono *armoniche superiori*.

Per ogni onda stazionaria si definiscono *nodi* i punti  $\bar{x}$  di  $[0, L]$  ove  $u(\bar{x}, t) \equiv 0$ . Si verifica subito che i nodi dell' $n$ -esima armonica sono dati dagli  $n + 1$  punti  $x_i = iL/n$ ,  $i = 0, \dots, n$ .  $\square$

Sopra si è proceduto in modo formale. È possibile rendere rigoroso il risultato di approssimazione della soluzione per serie, per esempio come segue. Usiamo la notazione

$$Q_T = (0, L) \times (0, T).$$

**TEOREMA 9.3.** *Supponiamo che il problema (9.1)–(9.5) abbia soluzione*

$$u \in C^2(Q_T) \cap C^1(\overline{Q_T}).$$

*Allora la serie (9.9), con i coefficienti  $C_n$  e  $D_n$  scelti in modo che valgano le (9.10), (9.11), converge a  $u$  nel senso della convergenza uniforme in  $Q_T$  (e quindi di  $L^2(Q_T)$ ).*

**DIMOSTRAZIONE.** Definiamo l'errore

$$z_k(x, t) = u(x, t) - \sum_{n=1}^k \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left[ C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) \right].$$

Il Corollario 6.3 implica subito che per ogni  $t > 0$

$$\int_0^L z_{kx}(x, t)^2 dx \leq \frac{1}{c^2} \int_0^L z_{kt}(x, 0)^2 dx + \int_0^L z_{kx}(x, 0)^2 dx. \quad (9.12)$$

Il primo integrale nel membro di destra della (9.12) tende a zero per  $k \rightarrow \infty$  per la scelta dei  $D_n$ ; infatti è uguale a  $\|g - S_k\|^2$ , ove  $S_k$  rappresenta la proiezione di  $g$  sui primi  $k$  termini del sistema di soli seni. Per il secondo integrale si ragiona in modo analogo, usando anche l'ipotesi  $f \in C^1([0, L])$  e le osservazioni della Sezione 8.3.

Dopodiché si ha per ogni  $(x, t) \in Q_T$

$$|z_k(x, t)| = \left| \int_0^x z_{k\xi}(\xi, t) d\xi \right| \leq \sqrt{L} \left[ \int_0^L z_{k\xi}(\xi, t)^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0,$$

che conclude la dimostrazione.  $\square$

## 9.2. Il caso non omogeneo

Consideriamo il problema

$$u_t - Du_{xx} = F(x, t), \quad 0 < x < L, 0 < t < T, \quad (9.13)$$

$$Du_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (9.14)$$

$$Du_x(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (9.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \quad (9.16)$$

Cerchiamo di sviluppare la soluzione  $u$  in serie di Fourier; la scelta del sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}$  in  $L^2((0, L))$  verrà precisata in conseguenza delle richieste cui ci condurrà il metodo.

Cerchiamo quindi i coefficienti  $\alpha_n$  in

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \varphi_n(x),$$

ove, di necessità,

$$\alpha_n(t) = \int_0^L u(x, t) \varphi_n(x) dx. \quad (9.17)$$

Definiamo anche per comodità di notazione

$$\beta_n = \int_0^L u_0(x) \varphi_n(x) dx, \quad F_n(t) = \int_0^L F(x, t) \varphi_n(x) dx.$$

I coefficienti  $\alpha_n$  vanno determinati a partire dalle informazioni delle (9.13)–(9.16). Per poter usare l'equazione (9.13) deriviamo la (9.17), e poi integriamo due volte per parti:

$$\begin{aligned} \alpha_n'(t) &= \int_0^L u_t(x, t) \varphi_n(x) dx = \int_0^L Du_{xx}(x, t) \varphi_n(x) dx + F_n(t) \\ &= [Du_x \varphi_n]_0^L - \int_0^L Du_x(x, t) \varphi_n'(x) dx + F_n(t) \\ &= [Du_x \varphi_n - Du \varphi_n']_0^L + D \int_0^L u(x, t) \varphi_n''(x) dx + F_n(t). \end{aligned} \quad (9.18)$$

I primi due termini nell'ultimo membro della (9.18) contengono entrambi quantità incognite, che però possiamo trattare con un'opportuna scelta di  $\varphi_n$ . Per iniziare, vogliamo che

$$[u_x \varphi_n - u \varphi_n']_0^L = 0. \quad (9.19)$$

In virtù delle (9.14), (9.15), si deve quindi chiedere

$$[u \varphi_n']_0^L = 0,$$

che in sostanza si riduce a

$$\varphi_n'(0) = \varphi_n'(L) = 0. \quad (9.20)$$

L'ultimo membro di (9.18) contiene ancora un integrale dell'incognita  $u$ , che non possiamo quindi calcolare in modo diretto. Tuttavia, possiamo giungere a una e.d.o. per  $\alpha_n$  se supponiamo per esempio

$$\varphi_n''(x) = \lambda_n \varphi_n(x), \quad 0 < x < L, \quad (9.21)$$

per qualche costante  $\lambda_n \in \mathbf{R}$ . In questo modo,  $\alpha_n$  risulta soddisfare (da (9.18) e (9.21))

$$\alpha_n' = D\lambda_n \alpha_n + F_n, \quad 0 < t < T. \quad (9.22)$$

La determinazione di  $\alpha_n$  risulta completa quando ricordiamo che deve valere la (9.16), per cui si avrà

$$\alpha_n(0) = \beta_n = \int_0^L u_0(x) \varphi_n(x) dx. \quad (9.23)$$

I problemi di Cauchy (9.22)–(9.23) individuano i coefficienti della serie che rappresenta  $u$ , e quindi concludono, salvo la loro effettiva risoluzione, il nostro metodo.

Resta tuttavia da vedere se esiste un sistema ortonormale che abbia le proprietà da noi usate, ossia se le condizioni (9.20), (9.21) sono soddisfatte per un'opportuna scelta del sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}$  (e delle costanti  $\lambda_n$ ). Possiamo anche riformulare il quesito dicendo che cerchiamo una famiglia di soluzioni dei problemi al contorno (9.20), (9.21) che costituisca un sistema ortonormale; in questa ricerca siamo liberi di scegliere le costanti  $\lambda_n$ . Con calcoli simili a quelli della Sezione 9.1 si verifica che le uniche soluzioni non nulle del problema (9.20), (9.21) si hanno per i valori

$$\lambda_n \in \left\{ 0, -\frac{\pi^2}{L^2}, -\frac{4\pi^2}{L^2}, \dots, -\frac{k^2\pi^2}{L^2}, \dots \right\}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (9.24)$$

in corrispondenza dei quali si ottengono le soluzioni

$$1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right), \quad \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \quad \dots, \quad \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad \dots$$

Queste funzioni sono ortogonali, come è facile verificare. Normalizzando queste funzioni si ottiene il sistema ortonormale

$$\frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right), \quad \dots, \quad \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad \dots \quad (9.25)$$

Questo sistema è ortonormale completo, come sappiamo dal Capitolo 7, e quindi il metodo ha avuto successo.

OSSERVAZIONE 9.4. I problemi come (9.20), (9.21) si dicono anche *problemi agli autovalori*, e le costanti  $\lambda_n$  si dicono *autovalori* (si noti l'analogia formale con l'usuale definizione di autovalore di una matrice). Confronta anche con l'Osservazione 9.1.  $\square$

Si ha quindi il seguente risultato:

TEOREMA 9.5. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \varphi_n(x)$$

*converge in  $L^2((0, L))$ , per ogni fissato  $t \in (0, T)$ , alla soluzione del problema (9.13)–(9.16), se i coefficienti  $\alpha_n$  sono scelti come in (9.22), (9.23), e le funzioni  $\varphi_n$  come in (9.25). Si assume qui che  $u_0 \in L^2((0, L))$  e che  $F$  sia una funzione limitata in  $Q_T$ .*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo le somme parziali della serie

$$u_k(x, t) = \sum_{n=1}^k \alpha_n(t) \varphi_n(x), \quad k \geq 1.$$

Usando le definizioni di  $\alpha_n$  e  $\varphi_n$  si vede che  $z_k = u - u_k$  soddisfa per  $0 < x < L$  e  $0 < t < T$

$$z_{kt} - Dz_{kxx} = F(x, t) - \sum_{n=1}^k F_n(t) \varphi_n(x) =: f_k(x, t), \quad (9.26)$$

$$Dz_{kx}(0, t) = 0, \quad (9.27)$$

$$Dz_{kx}(L, t) = 0, \quad (9.28)$$

$$z_k(x, 0) = u_0(x) - \sum_{n=1}^k \beta_n \varphi_n(x) =: v_k(x). \quad (9.29)$$

Si noti che  $f_k(\cdot, t)$  e  $v_k$  non sono altro che i resti degli sviluppi in serie di  $F(\cdot, t)$  e di  $u_0$ . Quindi tendono a zero in  $L^2((0, L))$  per  $k \rightarrow \infty$ . È qui che si usa la completezza del sistema ortonormale  $\{\varphi_n\}$ .

Applichiamo ora a  $z_k$  il Teorema 6.9, ottenendo

$$\int_0^L z_k(x, t)^2 dx \leq e^t \left\{ \int_0^L v_k(x)^2 dx + \int_0^t \int_a^b f_k(x, t)^2 dx d\tau \right\}. \quad (9.30)$$

La dimostrazione si conclude notando che il membro di destra della (9.30) converge a zero, per la definizione di  $f_k$  e  $v_k$ , come già osservato.  $\square$

**9.2.1. Il caso di dati al contorno non nulli.** Cerchiamo la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= 0, & 0 < x < \pi, 0 < t, \\ Du_x(0, t) &= 0, & 0 < t, \\ Du_x(\pi, t) &= e^{\gamma t}, & 0 < t, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Per ridursi a un caso con condizioni al contorno omogenee, cambiamo le variabili, introducendo la nuova incognita

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{x^2}{2\pi D} e^{\gamma t},$$

che risolve il problema

$$\begin{aligned} v_t - Dv_{xx} &= \frac{e^{\gamma t}}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma x^2}{2D}\right), & 0 < x < \pi, 0 < t, \\ Dv_x(0, t) &= 0, & 0 < t, \\ Dv_x(\pi, t) &= 0, & 0 < t, \\ v(x, 0) &= -\frac{x^2}{2\pi D}, & 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Cerchiamo la  $v$  come serie di coseni in  $(0, \pi)$ , in vista delle condizioni di Neumann prescritte sul contorno laterale del dominio. Scriviamo allora

$$v(x, t) = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \cos(nx),$$

ove gli  $\alpha_n$  si troveranno imponendo che la serie risolva l'e.d.p. termine a termine. A questo scopo introduciamo lo sviluppo della funzione sorgente

$$\begin{aligned} \frac{e^{\gamma t}}{\pi} \left(1 - \frac{\gamma x^2}{2D}\right) &= f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos(nx), \\ f_0(t) &= \frac{e^{\gamma t}}{\pi} \left(1 - \frac{c\pi^2}{6D}\right), & f_n(t) &= \frac{e^{\gamma t}}{\pi} \frac{2(-1)^{n+1}\gamma}{n^2 D}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Si ottiene dunque, sostituendo le serie nell'equazione differenziale, scambiando formalmente le operazioni di derivazione con la serie, e uguagliando i due membri dell'equazione termine a termine

$$\alpha'_n + n^2 D \alpha_n = f_n, \quad n \geq 0. \quad (9.31)$$

Dalla condizione iniziale per  $v$  si ottiene

$$\alpha_n(0) = \gamma_n, \quad (9.32)$$

ove i  $\gamma_n$  sono i coefficienti dello sviluppo in serie di coseni del dato iniziale, ossia

$$\gamma_0 = -\frac{\pi}{6D}, \quad \gamma_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n^2 D}, \quad n \geq 1.$$

I corrispondenti problemi di Cauchy per le  $\alpha_n$  si risolvono senza difficoltà, ottenendo

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \frac{1}{\gamma\pi} \left(1 - \frac{\gamma\pi^2}{6D}\right) (e^{\gamma t} - 1) + \gamma_0, \\ \alpha_n(t) &= \frac{2(-1)^{n+1}\gamma}{\pi n^2 D(n^2 D + \gamma)} (e^{\gamma t} - e^{-n^2 D t}) + \gamma_n e^{-n^2 D t}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Lo sviluppo in serie della  $v$  quindi è stato ottenuto.

Infine, la  $u$  è data da

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{x^2}{2\pi D} e^{\gamma t} + \frac{1}{\gamma\pi} \left(1 - \frac{\gamma\pi^2}{6D}\right) (e^{\gamma t} - 1) + \gamma_0 \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2(-1)^{n+1}\gamma}{\pi n^2 D(n^2 D + \gamma)} (e^{\gamma t} - e^{-n^2 D t}) + \gamma_n e^{-n^2 D t} \right] \cos(nx). \end{aligned}$$

**9.2.2. Il caso ‘sbagliato’: il sistema ortonormale non rispetta le condizioni al contorno.** Consideriamo il problema

$$u_t - Du_{xx} = 1, \quad 0 < x < \pi, 0 < t < T, \quad (9.34)$$

$$Du_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (9.35)$$

$$Du_x(\pi, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (9.36)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi. \quad (9.37)$$

Questo problema ha per unica soluzione

$$u(x, t) = t; \quad (9.38)$$

si noti che la (9.38) è in realtà anche lo sviluppo in serie di coseni di  $u$ .

Se cerchiamo lo sviluppo di  $u$  nel sistema ortonormale ‘sbagliato’, per esempio in quello  $\mathcal{S}$  dei seni, *ricaviamo a posteriori*, cioè usando la soluzione espressa in forma esplicita dalla (9.38),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t \sin(nx), \quad \alpha_n := \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n]. \quad (9.39)$$

Se però cercassimo di ottenere lo sviluppo (9.39) *prima di conoscere la soluzione*, con il metodo illustrato all’inizio della Sezione 9.2, non potremmo arrivare a scrivere i problemi di Cauchy (9.22), (9.23), perché non vale la (9.19).

Come ultima osservazione, sempre supponendo di ricercare una possibile equazione differenziale risolta dai coefficienti di (9.39), applichiamo a questi coefficienti l’operatore differenziale di (9.22):

$$\frac{d}{dt}(\alpha_n t) + n^2 D(\alpha_n t) = \alpha_n + n^2 D\alpha_n t = \frac{4}{\pi} n D t, \quad \text{per } n \text{ dispari.} \quad (9.40)$$

Perciò i ‘termini noti’ delle ipotetiche equazioni differenziali (9.40) *non* sono dati dai coefficienti di alcuna funzione in alcun sviluppo ortonormale (perché non tendono a zero).

### 9.3. L'equazione di Laplace in coordinate polari

**9.3.1. Problemi in corone circolari.** Consideriamo il problema posto nella corona circolare di raggi  $r_1 > r_0 > 0$

$$\Delta u = f(x, y), \quad r_0 < \sqrt{x^2 + y^2} < r_1, \quad (9.41)$$

$$u(x, y) = u_0(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r_0, \quad (9.42)$$

$$u(x, y) = u_1(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r_1, \quad (9.43)$$

che, in coordinate polari, diventa

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi} = g(r, \varphi), \quad r_0 < r < r_1, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad (9.44)$$

$$v(r_0, \varphi) = v_0(\varphi), \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad (9.45)$$

$$v(r_1, \varphi) = v_1(\varphi), \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad (9.46)$$

ove si sono definite

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= u(r \cos \varphi, r \sin \varphi), & g(r, \varphi) &= f(r \cos \varphi, r \sin \varphi), \\ v_0(\varphi) &= u_0(r_0 \cos \varphi, r_0 \sin \varphi), & v_1(\varphi) &= u_1(r_1 \cos \varphi, r_1 \sin \varphi). \end{aligned}$$

Vanno anche imposte le condizioni di periodicità (4.3)–(4.5). Cerchiamo la soluzione nella forma

$$v(r, \varphi) = \alpha_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) \cos(n\varphi) + \beta_n(r) \sin(n\varphi). \quad (9.47)$$

Procedendo come sopra, si ha che  $\alpha_0$  soddisfa

$$\alpha_0'' + \frac{1}{r}\alpha_0' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, \theta) d\theta,$$

$$\alpha_0(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_0(\theta) d\theta,$$

$$\alpha_0(r_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) d\theta;$$

invece per  $n \geq 1$  si ha

$$\alpha_n'' + \frac{1}{r}\alpha_n' - \frac{n^2}{r^2}\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, \theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$\alpha_n(r_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_0(\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

$$\alpha_n(r_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \cos(n\theta) d\theta,$$

e rispettivamente

$$\begin{aligned}\beta_n'' + \frac{1}{r}\beta_n' - \frac{n^2}{r}\beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, \theta) \sin(n\theta) d\theta, \\ \beta_n(r_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_0(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \\ \beta_n(r_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \sin(n\theta) d\theta.\end{aligned}$$

Gli integrali generali delle equazioni differenziali si possono ottenere con il metodo della variazione delle costanti, e sono dati da

$$\begin{aligned}R(r) &= k_1 + k_2 \ln r + \int_{r_0}^r \gamma(\rho) \rho \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho, & n = 0, \\ R(r) &= k_1 r^n + k_2 r^{-n} + \frac{r^n}{2n} \int_{r_1}^r \gamma(\rho) \rho^{-n+1} d\rho - \frac{r^{-n}}{2n} \int_{r_0}^r \gamma(\rho) \rho^{n+1} d\rho, & n \geq 1,\end{aligned}$$

ove  $\gamma(r)$  è il termine noto nell'equazione differenziale.

**9.3.2. Problemi in cerchi.** Se il problema è posto nel cerchio di raggio  $r_1 > 0$ , cioè se consiste in

$$\Delta u = f(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} < r_1, \quad (9.48)$$

$$u(x, y) = u_1(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r_1, \quad (9.49)$$

si procede in modo simile a quello visto nella Sottosezione 9.3.1, ma dobbiamo escludere dall'integrale generale delle e.d.o. ottenute le soluzioni che presentano singolarità nell'origine: questi integrali dunque saranno dati da

$$\begin{aligned}R(r) &= k_1 + \int_0^r \gamma(\rho) \rho \ln\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho, & n = 0, \\ R(r) &= k_1 r^n + \frac{r^n}{2n} \int_{r_1}^r \gamma(\rho) \rho^{-n+1} d\rho - \frac{r^{-n}}{2n} \int_0^r \gamma(\rho) \rho^{n+1} d\rho, & n \geq 1,\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 9.6. Mostriamo che la soluzione particolare  $w(r)$  che compare negli integrali  $R$  è regolare anche per  $r \rightarrow 0$ . Per brevità limitiamoci al caso di  $\alpha_n$ ,  $n \geq 1$  e a considerare

$$w''(r) = \gamma(r) + \frac{n-1}{2} r^{n-2} \int_{r_1}^r \gamma(\rho) \rho^{-n+1} d\rho - \frac{n+1}{2} r^{-n-2} \int_0^r \gamma(\rho) \rho^{n+1} d\rho.$$

Si noti che

$$\gamma(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r, \varphi) \cos(n\theta) d\theta \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(0, 0) \cos(n\theta) d\theta = 0, \quad r \rightarrow 0,$$

e anzi (vedi la Sezione 4.2)

$$|\gamma(r)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(r, \theta) - f(0, 0)| \, d\theta \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \max |\nabla f| r \, d\theta \leq 2 \max |\nabla f| r.$$

Consideriamo il secondo addendo in  $w''(r)$ , gli altri essendo anche più semplici: tale addendo è maggiorato in valore assoluto da

$$\frac{n-1}{2} \int_r^{r_1} |\gamma(\rho)| \frac{r^{n-2}}{\rho^{n-1}} \, d\rho \leq (n-1) \int_r^{r_1} \max |\nabla f| \frac{r^{n-2}}{\rho^{n-2}} \, d\rho \leq (n-1)r_1 \max |\nabla f|,$$

e quindi rimane limitato per  $r \rightarrow 0$ .  $\square$

**9.3.3. Il caso dell'equazione omogenea nel cerchio.** Se prendiamo  $f \equiv 0$  in (9.48), per gli argomenti svolti sopra, si hanno per lo sviluppo in serie della soluzione (9.47) i coefficienti

$$\begin{aligned} \alpha_0(r, r_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta) \, d\theta, \\ \alpha_n(r, r_1) &= \frac{r^n}{r_1^n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta) \cos(n\theta) \, d\theta, \\ \beta_n(r, r_1) &= \frac{r^n}{r_1^n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta) \sin(n\theta) \, d\theta. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Si noti che abbiamo ridefinito i coefficienti  $\alpha_n, \beta_n$  come funzioni delle due variabili  $r, r_1$ . In particolare  $\alpha_0$  non dipende di fatto da  $r$ . Definiamo anche per brevità di notazione

$$\alpha_n^*(r_1) = \alpha_n(1, r_1), \quad \beta_n^*(r_1) = \beta_n(1, r_1). \quad (9.51)$$

Tuttavia, gli argomenti svolti fin qui non sono rigorosi. Rendiamo tale il risultato nel prossimo Teorema:

**TEOREMA 9.7.** *Sia  $u \in C^2(\Omega)$  una funzione armonica in  $\Omega$ , ove  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbf{R}^2$  che contiene l'origine. Sia  $d = \text{dist}((0, 0), \partial\Omega)$ . Allora i coefficienti  $\alpha_n^*, \beta_n^*$  definiti in (9.50), (9.51) non dipendono da  $r_1$ , per  $r_1 \in (0, d)$ . Inoltre, vale*

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \alpha_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [\alpha_n^* \cos(n\varphi) + \beta_n^* \sin(n\varphi)], \quad (9.52)$$

per  $0 \leq r < d, -\pi \leq \varphi \leq \pi$ .

**DIMOSTRAZIONE.** A) Fissiamo  $r_1 \in (0, d)$ . Iniziamo con il dimostrare che vale per  $u$  la rappresentazione (9.52), ove i coefficienti  $\alpha_n^*, \beta_n^*$  sono intesi per ora come calcolati in  $r_1$ , e  $r \leq r_1$ .

Questa serie, per  $r = r_1$ , è la serie di Fourier di  $U(\varphi) := v(r_1, \varphi)$ . Dato che  $U$  soddisfa certo le ipotesi del Teorema 8.3, come restrizione alla curva  $\partial B_{r_1}$  di una funzione di classe  $C^2$ , la serie converge uniformemente a  $U$  su  $[-\pi, \pi]$ , ossia

$$\max_{-\pi \leq \varphi \leq \pi} |U(\varphi) - S_k(r_1, \varphi)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

D'altra parte, sia  $u$  che  $S_k$  sono funzioni armoniche nel cerchio  $B_{r_1}$ ; quindi per il principio di massimo (Teorema 5.1)

$$\max_{r \leq r_1} |u(r, \varphi) - S_k(r, \varphi)| \leq \max_{-\pi \leq \varphi \leq \pi} |U(\varphi) - S_k(r_1, \varphi)| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Quindi la serie converge uniformemente a  $u$  in  $B_{r_1}$ , e la (9.52) è stabilita.

B) Dimostriamo che i coefficienti  $\alpha_n^*$ ,  $\beta_n^*$  sono indipendenti da  $r_1$ .

Consideriamo due raggi  $0 < r_1 < r_2 < d$ . Fissiamo  $0 < r < r_1$ . Il ragionamento del punto A) si può ripetere sia per  $r_1$  che per  $r_2$ . Dunque la funzione

$$\varphi \mapsto v(r, \varphi)$$

ammette due sviluppi in serie di Fourier; per l'unicità dei coefficienti di Fourier (Proposizione 7.17) segue che i coefficienti delle due serie devono coincidere due a due, ossia

$$\alpha_0^*(r_1) = \alpha_0^*(r_2), \quad r^n \alpha_n^*(r_1) = r^n \alpha_n^*(r_2), \quad r^n \beta_n^*(r_1) = r^n \beta_n^*(r_2).$$

Dato che  $r > 0$ , segue la tesi.  $\square$

OSSERVAZIONE 9.8. È chiaro che la rappresentazione (9.52) vale anche in cerchi di centro diverso dall'origine; basta a questo scopo traslare il sistema di coordinate, visto che l'equazione di Laplace è invariante per traslazioni.  $\square$

Dalla formula (9.52) si possono trarre diverse conseguenze importanti.

TEOREMA 9.9. (FORMULA DELLA MEDIA) *Se  $u$  è armonica in  $\Omega$ , allora vale, per ogni  $(x_0, y_0) \in \Omega$  e per ogni  $0 < r_1 < \text{dist}((x_0, y_0), \partial\Omega)$  la*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r_1} \int_{\partial B_{r_1}(x_0, y_0)} u(x, y) \, d\sigma.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta considerare il caso  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , per l'Osservazione 9.8. Si prende quindi  $r = 0$  nella (9.52) e si ottiene

$$u(0, 0) = \alpha_0^*(r_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta) \, d\theta = \frac{1}{2\pi r_1} \int_{\partial B_{r_1}} u(x, y) \, d\sigma.$$

$\square$

TEOREMA 9.10. (LIOUVILLE) *Sia  $u$  armonica e limitata su tutto il piano  $\mathbf{R}^2$ . Allora  $u$  è una funzione costante.*

DIMOSTRAZIONE. In questo caso la (9.52) vale per ogni  $r_1 > 0$ . Per  $n \geq 1$  si ha dunque

$$\begin{aligned} |\alpha_n^*| &= \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1^n} \left| \int_{-\pi}^{\pi} v(r_1, \theta) \cos(n\theta) \, d\theta \right| \\ &\leq \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1^n} \int_{-\pi}^{\pi} |v(r_1, \theta)| \, d\theta \leq \lim_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{r_1^n} 2\pi \sup_{\mathbf{R}^2} |u| = 0. \end{aligned}$$

Nello stesso modo si vede che  $\beta_n^* = 0$ . Quindi  $u \equiv \alpha_0^*$ .  $\square$

ESERCIZIO 9.11. Le considerazioni svolte finora nella Sezione 9.3 hanno assunto l'esistenza della soluzione del problema al contorno per l'equazione di Laplace. Si dimostri che la serie in (9.52) converge a una soluzione del problema al contorno (9.48), (9.49); questo dà un teorema di esistenza di soluzioni per questo problema. Si può assumere per semplicità che il dato al bordo sia di classe  $C^1$ .  $\square$

9.3.3.1. *La formula di rappresentazione.* Con manipolazioni elementari (almeno dal punto di vista formale) si ottiene

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \, d\theta \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^n} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) [\cos(n\theta) \cos(n\varphi) + \sin(n\theta) \sin(n\varphi)] \, d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^n} \cos(n(\varphi - \theta)) \right\} \, d\theta, \end{aligned}$$

Definiamo ora per semplicità di notazione

$$z = \frac{r}{r_1} e^{i(\varphi - \theta)} = \frac{r}{r_1} \cos(\varphi - \theta) + i \frac{r}{r_1} \sin(\varphi - \theta);$$

Allora

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z^n \right\} \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right\} \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{z}{1-z} \right\} \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \left\{ 1 + 2 \frac{\operatorname{Re} z - (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{(1 - \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \right\} \, d\theta. \end{aligned}$$

Ricordando la definizione di  $z$  si ottiene infine

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_1(\theta) \frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2 + r^2 - 2r_1 r \cos(\varphi - \theta)} \, d\theta, \quad r < r_1. \quad (9.53)$$

Questa formula di rappresentazione della soluzione è discussa in dettaglio nella Sezione 11.5.

## Parte 4

# Formule di rappresentazione



## L'equazione delle onde

### 10.1. L'equazione delle onde o della corda vibrante

L'equazione

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (10.1)$$

è un modello per la propagazione di onde in un mezzo unidimensionale, ove  $c > 0$  è la velocità di propagazione delle onde, e  $u$  può assumere significati diversi. Per esempio, se la (10.1) rappresenta le piccole vibrazioni di una corda tesa, la  $u$  si interpreta come scostamento dalla posizione di riposo della corda. Il punto  $(x, t)$  varia in domini determinati dal particolare problema al contorno che stiamo risolvendo.

**TEOREMA 10.1.** *Sia  $u \in C^2(Q)$  una soluzione di (10.1) in  $Q = (a, b) \times (\alpha, \beta)$ . Allora esistono due funzioni  $f$  e  $g$  di una variabile, di classe  $C^2$ , tali che*

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad \text{in } Q. \quad (10.2)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Introduciamo la trasformazione di coordinate

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad (10.3)$$

e definiamo  $v$  come la  $u$  riletta nelle nuove variabili, ossia

$$v(\xi, \eta) = u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{-\xi + \eta}{2c}\right), \quad u(x, t) = v(x - ct, x + ct). \quad (10.4)$$

Si noti che  $v$  è definita e  $C^2$  nel rettangolo  $Q$  racchiuso dalle rette

$$\xi + \eta = 2a, \quad \xi + \eta = 2b, \quad -\xi + \eta = 2\alpha c, \quad -\xi + \eta = 2\beta c.$$

Calcoli elementari mostrano che la validità di (10.1) in  $Q$  implica

$$v_{\xi\eta} = 0, \quad \text{in } Q. \quad (10.5)$$

Poiché  $Q$  è normale rispetto ai due assi  $\xi$  ed  $\eta$ , segue da (10.5) che

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \quad \text{in } Q, \quad (10.6)$$

con  $f$  e  $g$  funzioni di classe  $C^2$ . Tornando alle variabili originali, si ottiene la (10.2).  $\square$

**OSSERVAZIONE 10.2.** Più in generale il Teorema 10.1 vale in ogni aperto  $Q$  il cui trasformato in  $Q$  nelle (10.3) sia normale rispetto agli assi  $\xi$  ed  $\eta$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 10.3.** *Le due funzioni  $f$  e  $g$  di (10.2) sono uniche nel senso che se vale anche*

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct), \quad (x, t) \in Q,$$

*allora esiste una costante  $K$  tale che  $f = \varphi + K$ ,  $g = \psi - K$ .*

DIMOSTRAZIONE. Oltre alla (10.6) si ha anche

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta). \quad (10.7)$$

Derivando queste due eguaglianze prima in  $\xi$  e poi in  $\eta$ , si ha  $f' = \varphi'$  e  $g' = \psi'$ . Dunque  $f = \varphi + K$ ,  $g = \psi + C$ . Infine  $C = -K$  segue confrontando ancora (10.6) e (10.7).  $\square$

## 10.2. Il problema ai valori iniziali per la corda infinita

Consideriamo il problema di Cauchy, o ai valori iniziali, in  $Q_\infty = \mathbf{R} \times (0, \infty)$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad \text{in } Q_\infty, \quad (10.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (10.9)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (10.10)$$

TEOREMA 10.4. Se  $u_0 \in C^2(\mathbf{R})$ , e  $u_1 \in C^1(\mathbf{R})$ , allora il problema (10.8)–(10.10) ha un'unica soluzione  $u \in C^2(Q_\infty) \cap C^1(\overline{Q_\infty})$ , espressa dalla formula

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds, \quad (x, t) \in Q_\infty. \quad (10.11)$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 10.1, la  $u$ , se esiste, deve avere una rappresentazione del tipo (10.2), valida in  $Q_\infty$ . Restano da determinare  $f$  e  $g$ , cosa che dobbiamo fare usando i dati al tempo  $t = 0$ . Questi danno

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad (10.12)$$

$$-cf'(x) + cg'(x) = u_1(x), \quad (10.13)$$

per ogni  $x \in \mathbf{R}$ . Derivando la (10.12) in  $x$  e sostituendo nella (10.13) si ottiene

$$f'(x) = \frac{1}{2}u_0'(x) - \frac{1}{2c}u_1(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Integrando in  $x$  si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds + K, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (10.14)$$

per un'opportuna costante  $K$ . Usando ancora la (10.12), si ottiene anche

$$g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s) ds - K, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (10.15)$$

Dalla (10.14) e dalla (10.15) segue subito la (10.11), quando si ricordi (10.2). Questo dimostra che la  $u$ , se esiste, deve avere la forma (10.11), e dunque che la soluzione è unica. Resta da dimostrare che la (10.11) è davvero una soluzione, il che però segue subito da una verifica diretta.  $\square$

OSSERVAZIONE 10.5. La (10.11) si dice *formula di D'Alembert*. L'intervallo  $[x - ct, x + ct]$  si dice *dominio di dipendenza* del punto  $(x, t)$ , perché il valore della soluzione  $u$  in  $(x, t)$  dipende solo dai valori assunti dai dati in tale intervallo.  $\square$

OSSERVAZIONE 10.6. La (10.11) mostra che, nelle ipotesi indicate nel Teorema 10.4, la  $u$  risulta in realtà definita e di classe  $C^2$  su tutto  $\mathbf{R}^2$  (perfino per  $t < 0$ ). Questo non è sorprendente in vista del lemma seguente.  $\square$

LEMMA 10.7. Se  $u \in C^2(Q)$  risolve (10.1) in  $Q = (a, b) \times (\alpha, \beta)$ , allora  $v(x, t) = u(x, -t)$  risolve ancora (10.1) in  $Q' = (a, b) \times (-\beta, -\alpha)$ , e  $w(x, t) = u(-x, t)$  la risolve in  $Q'' = (-b, -a) \times (\alpha, \beta)$ .

DIMOSTRAZIONE. Ovvvia.  $\square$

OSSERVAZIONE 10.8. La rappresentazione (10.2) e la (10.11) differiscono nel senso che la prima (ma non la seconda) prescinde dal dominio di definizione della  $u$  e dagli eventuali dati al contorno.  $\square$

ESEMPIO 10.9. La funzione

$$u(x, t) = [1 - (x - ct)^2]^{-\frac{1}{2}} + [1 - (x + ct)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

risolve (10.1) nel rettangolo

$$R = \{(x, t) \mid -1 < x - ct < 1, -1 < x + ct < 1\}.$$

Si ha che  $u(x, t) \rightarrow \infty$  quando  $\text{dist}(\partial R, (x, t)) \rightarrow 0$ .  $\square$

### 10.3. Dipendenza continua dai dati.

Per il problema di Cauchy per l'equazione delle onde vale il seguente teorema di dipendenza continua.

TEOREMA 10.10. Sia  $u$ , rispettivamente  $\bar{u}$ , definita dalla formula di D'Alembert (10.11) con dati  $u_0, u_1$ , rispettivamente con dati  $\bar{u}_0, \bar{u}_1$ . Qui basta supporre  $u_1, \bar{u}_1$  integrabili su ogni intervallo limitato di  $\mathbf{R}$ . Allora si ha

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| \leq \sup_{x \in \mathbf{R}} |u_0(x) - \bar{u}_0(x)| + t \sup_{x \in \mathbf{R}} |u_1(x) - \bar{u}_1(x)|, \quad (10.16)$$

per ogni  $t \geq 0$ .

DIMOSTRAZIONE. Dalla formula di D'Alembert segue subito per  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |u_0(x - ct) - \bar{u}_0(x - ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2} |u_0(x + ct) - \bar{u}_0(x + ct)| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |u_1(s) - \bar{u}_1(s)| ds \\ &\leq \sup_{\mathbf{R}} |u_0 - \bar{u}_0| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \sup_{\mathbf{R}} |u_1 - \bar{u}_1| ds \\ &= \sup_{\mathbf{R}} |u_0 - \bar{u}_0| + t \sup_{\mathbf{R}} |u_1 - \bar{u}_1|. \end{aligned}$$

$\square$

OSSERVAZIONE 10.11. La (10.16) implica la (3.41), per una costante  $C$  dipendente da  $t$ .

In questo caso i dati  $d$  sono costituiti da una coppia di funzioni  $(u_0, u_1)$ . Si noti anche che la  $C$  data dalla (10.16) diverge quando  $t \rightarrow \infty$ . Questo comportamento può verificarsi nei problemi di evoluzione temporale: piccole differenze nei dati iniziali portano a grandi differenze nelle soluzioni, se

lasciamo passare tempi abbastanza lunghi. Del resto accade la stessa cosa per le soluzioni della semplice e.d.o.  $y'(t) = y(t)$ .  $\square$

#### 10.4. Soluzioni deboli

Supponiamo di assegnare due dati  $u_0$  e  $u_1$  in (10.9), (10.10) che siano solo di classe  $C^0$ .

Il ragionamento svolto nella dimostrazione del Teorema 10.4 (vedi anche la Sottosezione 1.2.2 del Capitolo 1) prova che non può esistere in questo caso una soluzione di classe  $C^2(Q_\infty) \cap C^1(\overline{Q_\infty})$ . Tuttavia, la funzione  $u$  data dalla formula di D'Alembert risulta definita anche per  $u_0$  e  $u_1$  solo continue (e anche meno regolari, in realtà). Tale funzione  $u$ , perfino in questo caso, ha molte delle proprietà tipiche di un moto ondoso.

La dipendenza continua dimostrata nel Teorema 10.10 dà un altro punto di vista su questo stesso fenomeno. Siano  $u_0$  e  $u_1$  come sopra, e siano  $u_{0n}$  e  $u_{1n}$  due successioni di funzioni regolari, per esempio in  $C^2(\mathbf{R})$ , tali che

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u_0(x) - u_{0n}(x)| + \sup_{x \in \mathbf{R}} |u_1(x) - u_{1n}(x)| \leq a_n, \quad n \geq 1,$$

con  $a_n \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$ . La relativa successione di soluzioni  $u_n \in C^2(Q_\infty) \cap C^1(\overline{Q_\infty})$  di (10.8)–(10.10), soddisfa per ogni  $t > 0$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x, t) - u_n(x, t)| \leq (1 + t)a_n,$$

ove  $u$  è la funzione già definita sopra. Questa funzione perciò risulta limite per  $n \rightarrow \infty$  di soluzioni di problemi di Cauchy i cui dati convergono a  $u_0$  e  $u_1$ .

Queste considerazioni ci motivano a definire *soluzione debole* del problema (10.8)–(10.10) la  $u$  data dalla (10.11), a prescindere da ogni richiesta di derivabilità, e addirittura di continuità, di  $u_0$ ,  $u_1$ : basta che l'integrale di  $u_1$  sia definito come un numero reale su ogni intervallo limitato di  $\mathbf{R}$ . Si noti che queste soluzioni deboli non sono neppure continue se  $u_0$  non lo è. L'esistenza e l'unicità della soluzione debole, assegnati i dati  $u_0$  e  $u_1$  come appena specificato, sono ovvie.

Se i dati sono regolari come nel Teorema 10.4, la soluzione debole è anche di classe  $C^2(Q_\infty) \cap C^1(\overline{Q_\infty})$ . Tuttavia le soluzioni deboli esistono sotto ipotesi molto meno stringenti sui dati, e risultano perciò più comode da maneggiare.

ESEMPIO 10.12. Il dato  $u_0(x) = |x|$  risulta limite della successione

$$u_{0n}(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad x \in \mathbf{R},$$

con  $u_{0n} \in C^\infty(\mathbf{R})$ . Infatti

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La soluzione di (10.8)–(10.10) relativa alla coppia di dati  $(u_0, 0)$  si può quindi trovare come limite delle soluzioni relative ai dati  $(u_{0n}, 0)$ , oppure si può ottenere subito dalla formula di D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ |x + ct| + |x - ct| \}.$$

$\square$

### 10.5. Alcuni problemi per altri domini: tecniche di riflessione

**10.5.1. Problemi per la corda semiinfinita.** Per le soluzioni deboli del problema (10.8)–(10.10) valgono i seguenti risultati di simmetria.

PROPOSIZIONE 10.13. 1) Se  $u_0$  e  $u_1$  sono funzioni pari,  $u$  è pari in  $x$ . Inoltre, se si ha anche  $u_0 \in C^1(\mathbf{R})$ , e  $u_1 \in C^0(\mathbf{R})$ , allora  $u_x(0, t) = 0$ , per  $t > 0$ .  
2) Se  $u_0$  e  $u_1$  sono funzioni dispari,  $u$  è dispari in  $x$ , e  $u(0, t) = 0$  per  $t > 0$ .

DIMOSTRAZIONE. 1) Si calcola dalla formula (10.11), usando l'ipotesi che i dati siano pari,

$$\begin{aligned} u(-x, t) &= \frac{1}{2} [u_0(-x - ct) + u_0(-x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-x-ct}^{-x+ct} u_1(s) ds \\ &= \frac{1}{2} [u_0(x + ct) + u_0(x - ct)] - \frac{1}{2c} \int_{x+ct}^{x-ct} u_1(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

ove abbiamo operato il cambiamento di variabile d'integrazione  $\sigma = -s$ . Si vede subito che l'ultimo termine qui sopra coincide con la  $u(x, t)$  come definita dalla (10.11).

Dunque  $u_x(0, t)$ , se esiste, è nulla; ma in effetti dalla (10.11) segue subito che  $u$  è derivabile in  $x$  sotto le ipotesi di regolarità stipulate sopra.

2) Si ragiona in modo simile al punto 1).  $\square$

Poiché le soluzioni  $C^2$  sono anche soluzioni deboli, la Proposizione 10.13 vale anche per soluzioni di quella classe.

Consideriamo i due problemi

$$\mathcal{PN} \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), & x > 0, \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{PD} \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), & x > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Risultano allora vere le seguenti affermazioni:

a) Siano  $u_0 \in C^1([0, \infty))$ , e  $u_1 \in C^0([0, \infty))$ . Continuiamo a denotare con  $u_0, u_1$  le estensioni pari dei dati su tutto  $\mathbf{R}$ . Allora la soluzione debole data da (10.11), corrispondente a questi dati estesi, soddisfa al condizione al bordo di  $\mathcal{PN}$ , ossia  $u_x(0, t) = 0$ .

b) Siano  $u_0, u_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , e sia  $u_1$  integrabile sugli intervalli limitati di  $(0, \infty)$ . Continuiamo a denotare con  $u_0, u_1$  le estensioni dispari dei dati su tutto  $\mathbf{R}$ . Allora la soluzione debole data da (10.11) soddisfa la condizione al bordo di  $\mathcal{PD}$ , ossia  $u(0, t) = 0$ .

Possiamo dunque *definire* come soluzione debole di  $\mathcal{PN}$  (rispettivamente di  $\mathcal{PD}$ ) la  $u$  data dalla formula di D'Alembert per i dati iniziali ottenuti

riflettendo in modo pari (rispettivamente in modo dispari) i dati assegnati per  $x > 0$ , a prescindere dalle richieste di regolarità aggiunte in a) sopra.

**10.5.2. Problemi in un intervallo limitato.** Alcuni problemi ai valori al contorno in un intervallo  $(a, b)$  possono essere ricondotti al problema di Cauchy con tecniche di riflessione simili a quelle viste sopra. Quindi possono essere risolti con la formula di D'Alembert.

ESEMPIO 10.14. Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, & 0 < x < \pi, \\ u_t(x, 0) &= \cos x, & 0 < x < \pi, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u_x(\pi, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

In questo caso la riflessione dovrà essere dispari intorno a  $x = 0$  e pari intorno a  $x = \pi$ . Per il Lemma C.9, i dati estesi dovranno essere

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \begin{cases} |\sin x|, & 0 < x < 2\pi, \\ -|\sin x|, & -2\pi < x < 0; \end{cases} \\ u_1(x) &= \begin{cases} \cos x, & 0 < x < 2\pi, \\ -\cos x, & -2\pi < x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

ove poi sia inteso che  $u_0$  e  $u_1$  sono periodici con periodo  $4\pi$  su  $\mathbf{R}$ .  $\square$

## Integrazione per convoluzione

### 11.1. Convoluzioni

Se  $f$  è integrabile su  $\mathbf{R}$ , e  $g$  è limitata su  $\mathbf{R}$ , allora, per ogni  $x$  fissato, la funzione  $y \mapsto f(y)g(x-y)$  risulta integrabile su  $\mathbf{R}$ , e risulta pertanto definita la funzione *convoluzione*, o *prodotto di convoluzione* di  $f$  e  $g$

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

Il prodotto di convoluzione è commutativo, ossia

LEMMA 11.1. *Per  $f$  e  $g$  come sopra, vale per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f * g(x) = g * f(x)$ , ossia*

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y) dy. \quad (11.1)$$

Omettiamo la dimostrazione, che comunque si basa sull'idea di introdurre il cambiamento di variabili  $y \mapsto z = x - y$ , in modo da ottenere

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)g(z) dz = g * f(x).$$

Infatti la trasformazione  $y \mapsto x - y$  porta in sé il dominio di integrazione  $(-\infty, \infty)$  (scambiando gli estremi, ma  $dz = -dy$ ).

DEFINIZIONE 11.2. Una famiglia di funzioni  $\varphi_\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\lambda > 0$ , si dice famiglia di *nuclei di approssimazione* se

$$\varphi_\lambda(x) \geq 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}, \lambda > 0; \quad (11.2)$$

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_\lambda(x) dx = 1, \quad \text{per ogni } \lambda > 0; \quad (11.3)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} \varphi_\lambda(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-a} \varphi_\lambda(x) dx = 0, \quad \text{per ogni } a > 0. \quad (11.4)$$

□

TEOREMA 11.3. *Sia  $f$  una funzione integrabile e limitata su  $\mathbf{R}$ . Allora in ogni punto  $x \in \mathbf{R}$  di continuità per  $f$ , si ha*

$$f * \varphi_\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\varphi_\lambda(y) dy \rightarrow f(x), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (11.5)$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo  $x \in \mathbf{R}$ , ove  $f$  è continua, e  $\varepsilon > 0$ . Allora, usando (11.2) e (11.3) si ha

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\varphi_\lambda(y) dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbf{R}} [f(x-y) - f(x)]\varphi_\lambda(y) dy \right| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(x-y) - f(x)|\varphi_\lambda(y) dy \\ &= \int_{-a}^a |f(x-y) - f(x)|\varphi_\lambda(y) dy + \int_{|y| \geq a} |f(x-y) - f(x)|\varphi_\lambda(y) dy \\ &=: I_1(a) + I_2(a), \end{aligned}$$

ove  $a > 0$  verrà scelto sotto. Iniziamo con il limitare  $I_1(a)$ : si noti che per  $-a \leq y \leq a$ , vale  $|(x-y) - x| \leq a$ . Dunque, per la continuità di  $f$  in  $x$ , se  $a = a(\varepsilon, x)$  è scelto in modo opportuno, si ottiene

$$|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } y \in [-a, a]. \quad (11.6)$$

Perciò, invocando (11.3),

$$I_1(a) \leq \int_{-a}^a \varepsilon \varphi_\lambda(y) dy \leq \varepsilon \int_{\mathbf{R}} \varphi_\lambda(y) dy = \varepsilon.$$

A questo punto  $a > 0$  risulta fissato. Allora, in virtù di (11.4), ponendo  $M = \sup_{\mathbf{R}} |f|$ ,

$$I_2(a) \leq \int_{|y| \geq a} 2M\varphi_\lambda(y) dy = 2M \left[ \int_{-\infty}^{-a} \varphi_\lambda(y) dy + \int_a^{\infty} \varphi_\lambda(y) dy \right] \leq 2M\varepsilon, \quad (11.7)$$

pur di prendere  $\lambda \leq \bar{\lambda}$ , con  $\bar{\lambda} > 0$  opportuno. Si noti che  $\bar{\lambda}$  dipende, in principio, da  $a$  e da  $\varepsilon$ , ma a sua volta  $a$  è stato fissato in dipendenza da  $\varepsilon$  e da  $x$ . Dunque  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(\varepsilon, x)$ .

Riassumendo: abbiamo provato che per ogni fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\bar{\lambda}(\varepsilon, x)$  tale che

$$\left| \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\varphi_\lambda(y) dy - f(x) \right| \leq (2M+1)\varepsilon, \quad \text{se } 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}. \quad (11.8)$$

Questo dimostra la tesi.  $\square$

In effetti piccole modifiche alla dimostrazione del precedente risultato conducono a

TEOREMA 11.4. *Sia  $f$  una funzione integrabile e limitata su  $\mathbf{R}$ . Allora la funzione  $u = u(x, \lambda)$  definita in  $\bar{\Omega}^+ = \{x \in \mathbf{R}, \lambda \geq 0\}$  da*

$$u(x, \lambda) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}} f(x-y)\varphi_\lambda(y) dy, & \lambda > 0, \\ f(x), & \lambda = 0, \end{cases}$$

*è continua in  $(x, 0)$ , nel senso della continuità di funzioni di due variabili, per ogni punto  $x \in (a, b)$ , ove  $(a, b)$  è un intervallo di continuità per  $f$ .*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo  $x \in (a, b)$ , e anche

$$0 < \sigma < \frac{1}{4} \text{dist}(x, \mathbf{R} \setminus (a, b)).$$

Il Teorema 11.3 dimostra in effetti che la  $u$  è continua nel senso monodimensionale, ossia che  $u(x, \cdot)$  è continua in  $\lambda = 0$ .

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Vogliamo ora invece determinare un  $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$  tale che

$$|u(\xi, \lambda) - u(x, 0)| = \left| \int_{\mathbf{R}} f(\xi - y) \varphi_\lambda(y) \, dy - f(x) \right| \leq \varepsilon, \quad (11.9)$$

per ogni  $\xi$  e  $\lambda$  tali che  $|x - \xi| + \lambda \leq \delta$ . Allora, usando (11.3) si ha

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbf{R}} f(\xi - y) \varphi_\lambda(y) \, dy - f(x) \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathbf{R}} [f(\xi - y) - f(\xi)] \varphi_\lambda(y) \, dy \right| + |f(\xi) - f(x)| =: J_1(\xi) + J_2(\xi). \end{aligned}$$

Per la continuità di  $f$  in  $x$ , si sa che, per  $\bar{\rho}(\varepsilon, x)$  opportuno,

$$J_2(\xi) = |f(\xi) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \text{se } |\xi - x| \leq \bar{\rho}(\varepsilon, x). \quad (11.10)$$

Per il Teorema 11.3 (con  $x$  sostituito da  $\xi$ ; vedi (11.8)) si sa già che esiste un  $\bar{\lambda}(\varepsilon, \xi) > 0$  tale che per  $\lambda < \bar{\lambda}$ , si ha  $J_1(\xi) \leq (2M + 1)\varepsilon$ . Mostriamo che in realtà  $\bar{\lambda}$  dipende solo da  $x$  e non da  $\xi$  se si suppone a priori  $|\xi - x| \leq \sigma$ , ossia  $\xi \in [x - \sigma, x + \sigma]$ . Infatti, dalla dimostrazione di Teorema 11.3, si vede che  $\bar{\lambda}$  dipende da  $\xi$  solo attraverso  $a$ , e che  $a$ , d'altra parte, va ora scelta sotto la sola restrizione che valga

$$|f(\xi - y) - f(\xi)| \leq \varepsilon, \quad y \in [-a, a]. \quad (11.11)$$

Se supponiamo anche, senza introdurre nessuna reale limitazione, visto che  $x$  è fissato, che  $a \leq \sigma$ , allora in (11.11)  $\xi - y, \xi \in [x - 2\sigma, x + 2\sigma]$ . Dato che  $f$  è continua nel compatto  $[x - 2\sigma, x + 2\sigma] \subset (a, b)$ , è anche uniformemente continua in  $[x - 2\sigma, x + 2\sigma]$ , vale a dire, esiste un  $a > 0$  tale che la disuguaglianza (11.11) vale per ogni  $\xi \in [x - \sigma, x + \sigma]$ ,  $y \in [-a, a]$ . Tale  $a$  dipende solo da  $\varepsilon$  e dal compatto, ossia solo da  $\varepsilon$  e da  $x$ . Dunque vale

$$J_1(\xi) \leq (2M + 1)\varepsilon, \quad 0 < \lambda \leq \bar{\lambda}(\varepsilon, x). \quad (11.12)$$

La (11.10) e la (11.12) dimostrano (a patto di un'inessenziale ridefinizione di  $\varepsilon$ ) che (11.9) vale per ogni  $\xi$  e  $\lambda$  tali che

$$|x - \xi| + \lambda \leq \delta, \quad \text{con } \delta = \min(\sigma, \bar{\rho}(\varepsilon, x), \bar{\lambda}(\varepsilon, x)),$$

concludendo la dimostrazione.  $\square$

**COROLLARIO 11.5.** *Se  $(a, b)$  è un intervallo ove  $f$  è continua, allora la funzione  $u(x, \lambda)$  di Teorema 11.4 è uniformemente continua su ogni segmento  $\{(x, 0) \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ , con  $\alpha, \beta \in (a, b)$ .*

*In particolare, per ogni fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\lambda_\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $x \in [\alpha, \beta]$ ,*

$$|u(x, \lambda) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad 0 < \lambda \leq \lambda_\varepsilon. \quad (11.13)$$

DIMOSTRAZIONE. Il Corollario segue subito osservando che, per il Teorema 11.4, la  $u$  è continua sul segmento in questione, e quindi, per risultati generali, ivi uniformemente continua, dato che tale segmento è un compatto. La (11.13) è conseguenza immediata della definizione di uniforme continuità.  $\square$

OSSERVAZIONE 11.6. Poiché la dipendenza da  $x$  nella  $\varphi_\lambda * f = f * \varphi_\lambda$  può essere ‘letta’ mediante la  $\varphi_\lambda$ , in linea di massima tale integrale, come funzione di  $x$ , avrà la regolarità di  $\varphi_\lambda$ , che potrà essere anche maggiore di quella di  $f$ . Per questo le  $\varphi_\lambda$ , se sono regolari, si dicono anche *nuclei di mollificazione*. In questo modo  $f$  può essere approssimata con funzioni regolari.  $\square$

OSSERVAZIONE 11.7. Se

$$m \leq f(\xi) \leq M, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

allora, poiché  $\varphi_\lambda \geq 0$ , si può scrivere

$$m\varphi_\lambda(x - \xi) \leq f(\xi)\varphi_\lambda(x - \xi) \leq M\varphi_\lambda(x - \xi), \quad x, \xi \in \mathbf{R},$$

integrando la quale in  $-\infty < \xi < \infty$  si ottiene

$$m \leq f * \varphi_\lambda(x) \leq M, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (11.14)$$

Si confronti questa proprietà con il fenomeno di Gibbs per serie di Fourier, vedi Sezione 8.4.  $\square$

OSSERVAZIONE 11.8. Se sia la  $f$  che i nuclei  $\varphi_\lambda$  hanno supporto compatto, la stessa proprietà vale per  $f * \varphi_\lambda$ , come è facile verificare.  $\square$

OSSERVAZIONE 11.9. Una classe molto usata di nuclei di approssimazione è la seguente: si parte con una  $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R})$ , che soddisfi (11.2), (11.3), ossia

$$\varphi(x) \geq 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbf{R}; \quad \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) dx = 1.$$

Poi si definisce per ogni  $\lambda > 0$

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

È facile vedere che in questo modo la (11.2) e la (11.3) sono soddisfatte. Inoltre fissato  $a > 0$ , si ha per esempio, in virtù del Lemma A.14,

$$\int_a^\infty \varphi_\lambda(x) dx = \int_{\frac{a}{\lambda}}^\infty \varphi(y) dy \rightarrow 0, \quad \text{per } \lambda \rightarrow 0,$$

e quindi anche (11.4) risulta dimostrata. Si noti che questa relazione di limite *non* sarebbe verificata se si fosse preso  $a = 0$ .

Qualora la  $\varphi$  sia a supporto compatto, ciascuna  $\varphi_\lambda$  risulta a supporto compatto. Per esempio, se  $\text{supp } \varphi = [-1, 1]$ , allora  $\text{supp } \varphi_\lambda = [-\lambda, \lambda]$ .  $\square$

OSSERVAZIONE 11.10. In realtà la limitatezza di  $f$  su tutto  $\mathbf{R}$  non è davvero essenziale per il risultato. È sufficiente supporre, per esempio, che la  $f$  sia limitata sul supporto di tutte le  $\varphi_\lambda$ .  $\square$

OSSERVAZIONE 11.11. I risultati di questa Sezione si mantengono validi in più dimensioni, cioè se si considerano funzioni in  $\mathbf{R}^N$ . Qui osserviamo solo che, in questo caso, nella definizione di  $\varphi_\lambda$  nell'Osservazione 11.9, si deve porre

$$\varphi_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda^N} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N.$$

□

OSSERVAZIONE 11.12. La (11.3) può essere sostituita da

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_\lambda(x) dx \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

□

OSSERVAZIONE 11.13. La stessa dimostrazione del Teorema 11.3, quasi senza modifiche, permette di ottenere che

$$\int_{\mathbf{R}} f_\lambda(x-y) \varphi_\lambda(y) dy \rightarrow f(x), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (11.15)$$

sotto le ipotesi formulate su  $f$  e  $x$ , e se la  $\{f_\lambda\}$  è una famiglia di funzioni tali che valgono sia

per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $a = a(x, \varepsilon)$  e un  $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(x, \varepsilon)$ , tali che per ogni  $y \in [-a, a]$  e per ogni  $0 < \lambda < \bar{\lambda}$  si abbia

$$|f_\lambda(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad (11.16)$$

che

esiste un  $M_1 < \infty$  indipendente da  $\lambda$  che soddisfi per ogni  $\lambda > 0$

$$\sup_{\mathbf{R}} |f_\lambda| \leq M_1. \quad (11.17)$$

Infatti basta usare la (11.16) al posto della (11.6), e la (11.17) nella (11.7). □

OSSERVAZIONE 11.14. Tutto quanto detto in questa Sezione vale se la parametrizzazione dei nuclei, invece che con una variabile reale  $\lambda$ , è fatta con la successione dei naturali  $n$ . È ovvio che tutte le convergenze per  $\lambda \rightarrow 0$  devono essere sostituite con convergenze per  $n \rightarrow \infty$ . Volendo proprio ricadere alla lettera nel caso appena visto, se  $\phi_n$  è la famiglia dei nuclei di approssimazione parametrizzati dai naturali, basta definire

$$\varphi_\lambda = \phi_n, \quad \frac{1}{n+1} < \lambda \leq \frac{1}{n}.$$

Per esempio, in questo caso il Corollario 11.5 può essere enunciato come *Se  $(a, b)$  è un intervallo ove  $f$  è continua, allora la successione  $f_n = f * \phi_n$  converge uniformemente a  $f$  su ogni segmento compatto  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ , ossia, per definizione, per ogni fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $n_\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $x \in [\alpha, \beta]$ ,*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_\varepsilon.$$

□

OSSERVAZIONE 11.15. APPROSSIMAZIONE DELLA  $\delta$  DI DIRAC. Spesso nelle applicazioni si deve introdurre in un modello matematico una quantità ‘concentrata’: un impulso puntuale, una sorgente puntiforme, e così via.

Per esempio, supponiamo che una massa unitaria di gas sia concentrata all’istante  $t = 0$  nel punto  $x = 0$  (condizioni di simmetria piana), e sia lasciata libera di diffondere per  $t > 0$ . Una ‘funzione’  $\delta \geq 0$  che costituisca il dato iniziale per la concentrazione del gas in questo problema dovrebbe soddisfare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1, \quad (= \text{massa iniziale}); \quad \int_a^b \delta(x) dx = 0, \quad \text{se } 0 \notin [a, b].$$

È chiaro che non esiste una funzione integrabile con queste proprietà: la ‘massa’ dovrebbe essere concentrata tutta in solo punto  $x = 0$ , ma è noto che l’integrale su un solo punto si annulla (perché il punto ha misura nulla). Il concetto introdotto sopra in modo euristico si rende rigoroso definendo  $\delta$  come una *distribuzione*, ossia come una applicazione  $\delta : C(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ , definita da

$$\delta(f) = f(0), \quad \text{per ogni } f \in C(\mathbf{R}).$$

Questa distribuzione è nota come *delta di Dirac*. Si può definire una successione di applicazioni  $\delta_\lambda : C(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$  come

$$\delta_\lambda(f) = f * \varphi_\lambda(0), \quad \text{per ogni } f \in C(\mathbf{R})$$

(per esempio se tutte le  $\varphi_\lambda$  hanno supporto contenuto in  $(-1, 1)$ , vedi Osservazione 11.10). Allora vale  $\delta_\lambda(f) \rightarrow \delta(f)$  per  $\lambda \rightarrow 0$  (convergenza di numeri reali). In questo senso i nuclei  $\varphi_\lambda$  approssimano la delta di Dirac. Ad esempio, nell’ipotetico modello accennato sopra per la diffusione di un gas da una massa puntiforme, si potrebbero considerare problemi approssimati corrispondenti ai dati iniziali  $\varphi_\lambda$ .  $\square$

## 11.2. Equazione di Laplace nel semipiano

Cerchiamo di risolvere il problema al contorno per l’equazione di Laplace

$$\Delta u = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0, \quad (11.18)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (11.19)$$

ove  $u_0$  è una funzione continua e limitata su  $\mathbf{R}$ . L’idea è scrivere la soluzione nella forma

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x - \xi) \varphi_\lambda(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) \varphi_\lambda(x - \xi) d\xi, \quad (11.20)$$

ove i  $\varphi_\lambda$  sono *opportuni* nuclei di approssimazione. Nel seguito supponiamo che i  $\varphi_\lambda$  abbiano tutta la regolarità necessaria per l’argomento che svilupperemo, salvo verificarla a posteriori.

È noto che l’integrale nella (11.20) tende a  $u_0(x)$  se  $\lambda \rightarrow 0$ . Noi vogliamo che la  $u(x, y)$  tenda a  $u_0(x)$  se  $y \rightarrow 0$ : dunque basterà scegliere  $\lambda = \lambda(y) \rightarrow 0$  per  $y \rightarrow 0$ . Questo però garantisce solo la (11.19); resta da verificare la (11.18).

Procedendo in modo formale, possiamo pensare di scambiare le derivate con il segno di integrale in (11.18), ottenendo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi_{\lambda(y)}(x - \xi) d\xi. \quad (11.21)$$

Siamo quindi condotti a cercare un nucleo di approssimazione, e una funzione  $\lambda = \lambda(y)$ , tali che

$$\Delta \varphi_{\lambda(y)}(x) = 0. \quad (11.22)$$

La scelta di  $\lambda$  come funzione di  $y$  può essere determinata da considerazioni di varia natura, o con i calcoli. Tentiamo con

$$\lambda(y) = y, \quad \varphi_y(x) = \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x}{y}\right), \quad x \in \mathbf{R}, y > 0.$$

**11.2.1. Calcolo di  $\varphi_y$ .** Resta da trovare  $\varphi$ , ossia da imporre (11.22). Si ha con calcoli diretti

$$\Delta \varphi_y(x) = \frac{1}{y^3} \left\{ \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^2} \varphi''\left(\frac{x}{y}\right) + 4\frac{x}{y} \varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + 2\varphi\left(\frac{x}{y}\right) \right\} = 0.$$

Ponendo  $s = x/y$ , e considerando  $s$  come variabile indipendente, cosicchè  $\varphi' = d\varphi/ds$ , si ha

$$\varphi''(s) + s^2 \varphi''(s) + 4s \varphi'(s) + 2\varphi(s) = 0, \quad s \in \mathbf{R},$$

ossia

$$\varphi''(s) + (s^2 \varphi'(s))' + 2(s\varphi(s))' = 0, \quad s \in \mathbf{R},$$

da cui per integrazione,

$$\varphi'(s) + s^2 \varphi'(s) + 2s\varphi(s) = \varphi'(0) = 0, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Si è posto  $\varphi'(0) = 0$  perché, per motivi di simmetria, ci aspettiamo che  $\varphi_y(x)$  sia pari in  $x$ . Quindi

$$\varphi'(s) + (s^2 \varphi(s))' = 0, \quad s \in \mathbf{R},$$

da cui

$$\varphi(s) + s^2 \varphi(s) = \varphi(0), \quad s \in \mathbf{R},$$

ove  $\varphi(0)$  va scelto in modo che

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds = \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \varphi(0)\pi, \quad \text{cioè} \quad \varphi(0) = \frac{1}{\pi}.$$

Dunque

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+s^2}, \quad \text{ossia} \quad \varphi_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbf{R}, y > 0.$$

Un calcolo diretto mostra che

$$\Delta \varphi_y(x) = \Delta \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \right\} = 0,$$

cioè che le ipotesi fatte su  $\varphi$  sono compatibili con la (11.22).

Tornando alla (11.20) si ha

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi, \quad (x, y) \in \Omega^+, \quad (11.23)$$

ove si è posto

$$\Omega^+ = \{(x, y) \mid y > 0\}.$$

Concludiamo: la (11.19) è garantita, perché la  $\varphi$  soddisfa le ipotesi dell'Osservazione 11.9. La (11.18) invece è conseguenza dell'uguaglianza (11.21); a sua volta questa segue da teoremi di derivazione di integrali dipendenti da parametro nel cui dettaglio non entriamo.

Si perviene così alla parte di esistenza nel

**TEOREMA 11.16.** *Sia  $u_0 \in C(\mathbf{R})$  una funzione limitata su  $\mathbf{R}$ . Allora esiste una sola funzione  $u \in C(\overline{\Omega^+}) \cap C^2(\Omega^+)$ , che sia limitata su  $\Omega^+$  e risolva (11.18), (11.19). Tale soluzione ha la rappresentazione in (11.23).*

La dimostrazione dell'unicità viene omessa.

**OSSERVAZIONE 11.17.** Si noti che la soluzione  $u$  del Teorema 11.16 è unica solo nella classe delle funzioni limitate. Se per esempio prescriviamo il dato  $u_0 \equiv 0$ , oltre all'unica soluzione limitata  $u \equiv 0$  si ha anche la  $u(x, y) = y$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 11.18.** La formula (11.23) dà ancora la soluzione del problema (11.18), (11.19) se il dato  $u_0$  è solo limitato (ma non continuo) su  $\mathbf{R}$ . In questo caso  $u$  è continua in  $(x, 0)$  nei punti interni a intervalli di continuità di  $u_0$  (vedi Teorema 11.4).  $\square$

**PROPOSIZIONE 11.19.** *Se  $m \leq u_0 \leq M$ , allora  $m \leq u(x, y) \leq M$ . Se inoltre  $u_0$  è integrabile su  $\mathbf{R}$ , vale*

$$|u(x, y)| \leq \frac{\text{costante}}{y}, \quad x \in \mathbf{R}, y > 0. \quad (11.24)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La prima asserzione segue subito da

$$u(x, y) \geq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} m \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi = m \int_{\mathbf{R}} \varphi_y(x - \xi) d\xi = m.$$

Per quanto riguarda la (11.24), si ha

$$|u(x, y)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} |u_0(\xi)| \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} d\xi \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}} |u_0(\xi)| \frac{1}{y} d\xi.$$

$\square$

### 11.3. Equazione del calore nel semipiano

Le idee della Sezione 11.2 si possono applicare anche nel caso dell'equazione del calore. Qui, come d'uso quando si trattano equazioni paraboliche, indichiamo con  $t$  la variabile 'tempo'. Quindi  $\Omega^+ = \{(x, t) \mid t > 0\}$ . Tuttavia in questo caso, nella scelta di  $\varphi_{\lambda(t)}(x)$ , si deve prendere  $\lambda(t) = \sqrt{Dt}$ , e, in particolare,

$$\varphi_{\lambda}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}} e^{-\frac{x^2}{4\lambda^2}}. \quad (11.25)$$

La giustificazione di questa scelta verrà discussa nella Sottosezione 11.3.2. Si potrebbe dimostrare il seguente teorema di esistenza e unicità per il problema nel semipiano

$$u_t - Du_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (11.26)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (11.27)$$

**TEOREMA 11.20.** *Sia  $u_0 \in C(\mathbf{R})$  una funzione limitata su  $\mathbf{R}$ . Allora esiste una sola funzione  $u \in C(\overline{\Omega^+}) \cap C^{2,1}(\Omega^+)$ , che sia limitata su  $\Omega^+$  e risolva (11.26) e (11.27). Tale soluzione ha la rappresentazione*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{\mathbf{R}} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi, \quad (x, t) \in \Omega^+. \quad (11.28)$$

La funzione

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0, \quad (11.29)$$

si dice *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore.

**OSSERVAZIONE 11.21.** La formula (11.28) dà ancora la soluzione del problema (11.26), (11.27) se il dato  $u_0$  è solo limitato (ma non continuo) su  $\mathbf{R}$ . In questo caso  $u$  è continua in  $(x, 0)$  nei punti interni a intervalli di continuità di  $u_0$  (vedi Teorema 11.4).  $\square$

**PROPOSIZIONE 11.22.** *Se  $m \leq u_0 \leq M$ , allora  $m \leq u(x, t) \leq M$ . Se inoltre  $u_0$  è integrabile su  $\mathbf{R}$ , vale*

$$|u(x, t)| \leq \frac{\text{costante}}{\sqrt{t}}, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0. \quad (11.30)$$

**DIMOSTRAZIONE.** La prima asserzione segue subito da

$$u(x, t) \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{\mathbf{R}} M e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi = M \int_{\mathbf{R}} \Gamma(x - \xi, t) d\xi = M.$$

Per quanto riguarda la (11.30), si ha

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{\mathbf{R}} |u_0(\xi)| e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{\mathbf{R}} |u_0(\xi)| d\xi.$$

$\square$

**PROPOSIZIONE 11.23.** *Sia  $u_0$  continua, limitata e integrabile in  $\mathbf{R}$ . Allora la soluzione  $u$  di (11.26), (11.27) risulta integrabile in  $\mathbf{R}$  per ogni fissato livello temporale  $t > 0$ , e vale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) dx, \quad t > 0. \quad (11.31)$$

La dimostrazione si basa sul seguente procedimento formale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} dx \right\} u_0(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

perché  $\int_{\mathbf{R}} \Gamma(x, t) dx = 1$ . Lo scambio degli integrali andrebbe però giustificato in modo rigoroso.

**11.3.1. Dimostrazione dell'unicità di soluzioni nel Teorema 11.20.** Usiamo un metodo di tipo energetico (vedi Capitolo 6). Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni limitate come nell'enunciato. Poniamo  $v = u_1 - u_2$ . Allora  $v$  risolve il problema (11.26), (11.27), con dato iniziale  $v(x, 0) = 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

Sia  $\psi \in C^2(\mathbf{R})$  una funzione tale che

$$\psi(x) = 1, \quad |x| \leq 1; \quad \psi(x) = 0, \quad |x| \geq 2; \quad \psi(x) \geq 0, \quad 1 \leq |x| \leq 2.$$

Definiamo poi per un  $\rho > 0$  fissato

$$\zeta(x) = \psi\left(\frac{x}{\rho}\right).$$

Si noti che

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= 1, \quad |x| \leq \rho; \quad \zeta(x) = 0, \quad |x| \geq 2\rho; \\ \zeta(x) &\geq 0, \quad \rho \leq |x| \leq 2\rho; \\ |\zeta'(x)| &\leq \frac{C}{\rho}, \quad x \in \mathbf{R}; \quad |\zeta''(x)| \leq \frac{C}{\rho^2}, \quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

ove si può prendere  $C = \max_{\mathbf{R}}(|\psi'| + |\psi''|)$ .

Supponiamo per semplicità che  $v \in C^{2,1}(\overline{\mathcal{Q}_+})$ : il caso generale segue mediante approssimazione del dominio: si integra per parti in  $\mathbf{R} \times (\varepsilon, t)$  e poi si prende il limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Moltiplichiamo l'equazione  $v_t - Dv_{xx} = 0$  per  $v\zeta$  e integriamo per parti, ottenendo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} v\zeta(v_\tau - Dv_{xx}) dx d\tau = \frac{1}{2} \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, t)^2 \zeta(x) dx \\ &\quad + D \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} (v_x^2 \zeta + vv_x \zeta') dx d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, t)^2 \zeta(x) dx + D \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} v_x(x, \tau)^2 \zeta(x) dx d\tau \\ &\quad - D \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, \tau)^2 \zeta''(x) dx d\tau. \end{aligned}$$

Dunque, per le proprietà di  $\zeta$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\rho}^{\rho} v(x, t)^2 dx &\leq \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, t)^2 \zeta(x) dx \\ &\leq D \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} v(x, \tau)^2 \zeta''(x) dx d\tau \leq \frac{CD}{\rho^2} \int_0^t \int_{-2\rho}^{2\rho} M^2 dx d\tau = \frac{4CDM^2}{\rho} t, \end{aligned}$$

ove  $M$  è una costante che maggiora  $|v|$  in  $\Omega_+$ ; infatti  $v$  è limitata come differenza di funzioni limitate. Per  $\rho \rightarrow \infty$  si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t)^2 dx \leq 0,$$

ossia  $v(x, t) = 0$  per ogni  $x$ . Dato che  $t > 0$  può essere scelto ad arbitrio, segue che  $v \equiv 0$ .

**11.3.2. Ricerca della soluzione fondamentale.** Un metodo diverso di ricerca è svolto nella Sezione 14.3.

Cambiando la variabile dei tempi in  $t' = Dt$ , ma usando da subito il vecchio nome di variabile  $t$  per la nuova, si vede che nei calcoli si può supporre  $D = 1$ , fermo restando che dovremo poi eseguire la sostituzione inversa nella funzione trovata.

Cerchiamo una soluzione del problema

$$\Gamma_t - \Gamma_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (11.32)$$

$$\Gamma(x, 0) = \delta(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (11.33)$$

nella forma di nucleo di approssimazione. La dipendenza del parametro  $\lambda$  da  $t$  è a priori ignota; indicheremo questo parametro con  $R(t)$ . Dunque poniamo

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{R(t)} f\left(\frac{x}{R(t)}\right). \quad (11.34)$$

Qui  $f$  e  $R$  sono funzioni positive, da determinare, che supporremo abbastanza regolari da giustificare i calcoli seguenti, salvo verificare in ultimo che lo siano davvero.

Calcoliamo

$$\begin{aligned} \Gamma_t - \Gamma_{xx} &= -\frac{\dot{R}(t)}{R(t)^2} f\left(\frac{x}{R(t)}\right) - x \frac{\dot{R}(t)}{R(t)^3} f'\left(\frac{x}{R(t)}\right) - \frac{1}{R(t)^3} f''\left(\frac{x}{R(t)}\right) \\ &= -\frac{1}{R(t)^3} \left\{ \dot{R}(t) R(t) \left[ f\left(\frac{x}{R(t)}\right) + \frac{x}{R(t)} f'\left(\frac{x}{R(t)}\right) \right] + f''\left(\frac{x}{R(t)}\right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\frac{f''\left(\frac{x}{R(t)}\right)}{f\left(\frac{x}{R(t)}\right) + \frac{x}{R(t)} f'\left(\frac{x}{R(t)}\right)} = -\dot{R}(t) R(t),$$

supponendo che il denominatore qui sopra sia diverso da zero (questa ipotesi a posteriori non sarà verificata; tuttavia la  $f$  trovata sarà comunque la soluzione desiderata). Poniamo  $s = x/R(t)$ , ottenendo

$$\frac{f''(s)}{f(s) + s f'(s)} = -\dot{R}(t) R(t),$$

che ci conduce a ipotizzare che esista una costante  $a$  tale che

$$\begin{aligned} \frac{f''(s)}{f(s) + s f'(s)} &= -a, \quad s \in \mathbf{R}, \\ \dot{R}(t) R(t) &= a, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Si noti che qui consideriamo  $s$  come variabile indipendente.

A causa della condizione iniziale (11.33) si deve avere  $R(0) = 0$ ; ci attendiamo che  $R$  sia crescente, e quindi supponiamo  $a > 0$ . Una integrazione elementare dà allora

$$R(t) = \sqrt{2at}, \quad t \geq 0. \quad (11.35)$$

Poi

$$f''(s) = -a[f(s) + s f'(s)] = -a[s f(s)]', \quad \text{da cui} \quad f'(s) - f'(0) = -a s f(s).$$

È naturale supporre, vista la simmetria del dato iniziale e dell'equazione del calore, che  $f$  sia pari. Dunque  $f'(0) = 0$  e si conclude

$$f(s) = f(0) e^{-\frac{as^2}{2}}, \quad s \in \mathbf{R}. \quad (11.36)$$

La funzione  $f$ , secondo la teoria delle convoluzioni deve avere integrale pari ad 1, quindi

$$1 = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{as^2}{2}} ds = f(0) \sqrt{\frac{2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = f(0) \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Questo determina  $f(0)$ , cosicché

$$f(s) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{as^2}{2}}, \quad s \in \mathbf{R}. \quad (11.37)$$

Sostituendo (11.35) e (11.37) in (11.34) si ottiene

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0.$$

Si noti che è scomparsa ogni dipendenza dalla scelta della costante  $a$ .

Si verifica a questo punto per ispezione diretta che la  $\Gamma$  soddisfa le (11.32)–(11.33). In particolare la seconda è verificata nel senso

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \Gamma(\xi, t) d\xi = \delta(g) = g(0), \quad \text{per ogni } g \in C(\mathbf{R}) \text{ limitata.}$$

## 11.4. Proprietà qualitative di soluzioni dell'equazione del calore

**11.4.1. Propagazione con velocità infinita.** Qui supponiamo sempre che  $u_0 \geq 0$ . Quindi la soluzione di (11.26), (11.27) risulta anch'essa non negativa. Consideriamo il caso in cui il dato iniziale  $u_0$  è non negativo, e diverso da zero solo su un intervallo limitato, per esempio  $(-L, L)$ . Allora la soluzione corrispondente vale

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-L}^L u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi, \quad (x, t) \in \Omega^+. \quad (11.38)$$

È facile osservare che per ogni scelta di  $(x, t) \in \Omega^+$ , la  $u(x, t)$  è espressa dall'integrale su  $(-L, L)$  di una funzione strettamente positiva (per quanto, in generale, 'piccola'). Perciò, per ogni fissato  $t > 0$ ,  $u(x, t)$  risulta positivo per ogni  $x \in (-\infty, \infty)$ , nonostante che il dato iniziale fosse nullo fuori di  $(-L, L)$ . Questo fenomeno è noto come *propagazione con velocità infinita delle perturbazioni*. Si noti che, per esempio, nel caso dell'equazione delle onde non avviene niente del genere.

È chiaro però che un modello ragionevole di diffusione non può predire che ci sia una consistente fuga di massa (o di calore) verso l'infinito in un tempo piccolo a piacere. Si noti infatti che la quantità in (11.38) è piccolissima per  $t \gtrsim 0$ ,  $|x| \gg 1$ . In realtà la zona ove risulta confinata quasi tutta la massa si allarga con velocità finita (e anzi decrescente nel tempo), come precisa il prossimo risultato.

**PROPOSIZIONE 11.24.** *Per ogni  $0 < \varepsilon < 1$  esiste un  $C = C(\varepsilon) > 0$  tale che*

$$\int_{-C\sqrt{Dt}-L}^{C\sqrt{Dt}+L} u(x, t) dx \geq (1 - \varepsilon) \int_{-L}^L u_0(x) dx, \quad (11.39)$$

per ogni  $t$  e  $L$  positivi, e per ogni  $u_0 \geq 0$  e limitata su  $\mathbf{R}$ .

DIMOSTRAZIONE. Usando la formula di rappresentazione si ha, fissato  $L > 0$ , e per un  $C > 0$  da scegliere,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-C\sqrt{Dt}-L}^{C\sqrt{Dt}+L} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi dx \\
 & \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-C\sqrt{Dt}-L}^{C\sqrt{Dt}+L} \int_{-L}^L u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi dx \\
 & = \int_{-L}^L u_0(\xi) \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-C\sqrt{Dt}-L}^{C\sqrt{Dt}+L} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} dx \right\} d\xi \\
 & = \int_{-L}^L u_0(\xi) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{C}{2} - \frac{L+\xi}{2\sqrt{Dt}}}^{\frac{C}{2} + \frac{L-\xi}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2} dz \right\} d\xi \\
 & \geq \int_{-L}^L u_0(\xi) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} e^{-z^2} dz \right\} d\xi,
 \end{aligned}$$

ove si è usato che per  $|\xi| \leq L$  valgono  $L - \xi \geq 0$ ,  $L + \xi \geq 0$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $C = C(\varepsilon)$  tale che

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} e^{-z^2} dz \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz - \varepsilon = 1 - \varepsilon.$$

Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

Applicando la (11.39) al caso di  $u_0$  nullo al di fuori di  $(-L, L)$ , otteniamo che la massa, a meno di una frazione  $\varepsilon$  prefissata, resta confinata in una regione che si allarga come  $\sqrt{t}$ .

La Proposizione 11.24 istituisce una relazione tra l'ampiezza della zona che contiene la massa e il massimo della  $u$  in tale regione:

$$2R_\varepsilon(t) \max_{|x| \leq R_\varepsilon(t)} u(x, t) \geq \int_{-R_\varepsilon(t)}^{R_\varepsilon(t)} u(x, t) dx \geq (1 - \varepsilon) \int_{-L}^L u_0(\xi) d\xi > 0, \quad (11.40)$$

ove si è posto  $R_\varepsilon(t) = C\sqrt{Dt} + L$ , e si suppone valga  $u_0 \not\equiv 0$  su  $(-L, L)$ . Dunque a maggior ragione

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} u(x, t) \geq \frac{\text{costante}}{R_\varepsilon(t)}. \quad (11.41)$$

Per grandi  $t$ , e per  $u_0$  integrabile, il tasso di decadimento dato dalla (11.41) è proprio quello della stima (11.30), che quindi risulta ottimale quando  $u \geq 0$ . Si può anche dire di più: non solo il massimo, ma anche il minimo di  $u$  soddisfa una stima simile alla (11.40).

PROPOSIZIONE 11.25. Sia  $u_0$  continua e limitata in  $\mathbf{R}$ . Allora per ogni  $L > 0$ ,  $t_0 > 0$  vale

$$u(x, t) \geq \frac{H}{\sqrt{Dt}}, \quad |x| \leq \frac{L}{\sqrt{t_0}}\sqrt{t}, t \geq t_0, \quad (11.42)$$

ove

$$H = \frac{e^{-\frac{L^2}{Dt_0}}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-L}^L u_0(\xi) d\xi.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha, visto che  $u_0 \geq 0$ ,

$$u(x, t) \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-L}^L u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \geq \frac{e^{-K^2}}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-L}^L u_0(\xi) d\xi,$$

se valgono  $-L \leq \xi \leq L$  e

$$\frac{(x-\xi)^2}{4Dt} \leq K^2, \quad \text{ossia} \quad |x-\xi| \leq 2K\sqrt{Dt}. \quad (11.43)$$

Qui  $K > 0$  è una costante da scegliere. D'altronde se  $|x| \leq L\sqrt{t/t_0}$ ,  $|\xi| \leq L$ ,

$$|x-\xi| \leq |x| + |\xi| \leq \frac{L}{\sqrt{t_0}}\sqrt{t} + L \leq 2K\sqrt{Dt},$$

purché si prenda per esempio  $K = L/\sqrt{Dt_0}$ ,  $t \geq t_0$ .  $\square$

**11.4.2. Effetto regolarizzante.** Se  $u_0(x) = \chi_{(0,+\infty)}(x) - \chi_{(-\infty,0)}(x)$  (una funzione a gradino), la soluzione si può mettere nella forma

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} e^{-s^2} ds, \quad x \in \mathbf{R}, t > 0. \quad (11.44)$$

Si noti che la  $u$  è in  $C^\infty(\{t > 0\})$ , mentre il dato iniziale non è neppure continuo. Questo è un esempio del cosiddetto *effetto regolarizzante dell'equazione del calore*, che fa sì che le soluzioni di tale equazione siano sempre di classe  $C^\infty$  in ogni aperto dove sono definite, anche se i dati iniziali (o al bordo) non lo sono.

### 11.5. Equazione di Laplace nel cerchio

Nonostante la geometria sia diversa, anche la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } B_R(\mathbf{x}_0), \\ u = u_0, & \text{su } \partial B_R(\mathbf{x}_0), \end{cases} \quad (11.45)$$

ove  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^2$ ,  $R > 0$ , può essere espressa mediante un integrale che in sostanza è un prodotto di convoluzione. La formula risolutiva è

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} u_0(\boldsymbol{\xi}) d\sigma, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < R, \quad (11.46)$$

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R.$$

La formula integrale in (11.46) si dice *formula di Poisson*. Vedi anche la Sottosezione 9.3.3.

Nel seguito indichiamo con  $\Delta_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{x}}$  gli operatori differenziali in cui le derivate sono calcolate rispetto alle componenti di  $\mathbf{x}$ .

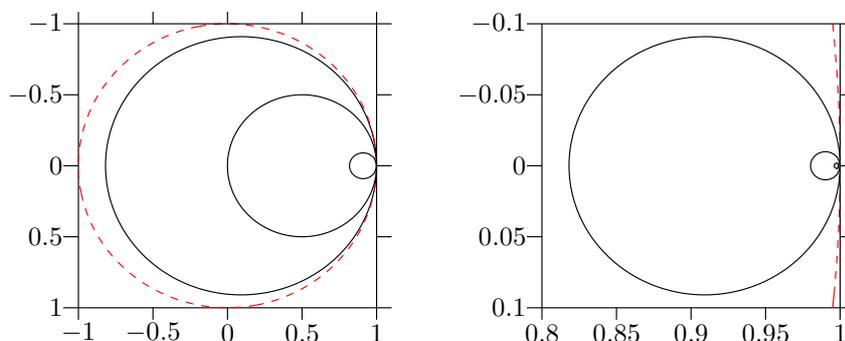


FIGURA 11.1. A sinistra: le linee di livello di  $2\pi K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ , per  $\boldsymbol{\xi} = (1, 0)$ ,  $R = 1$ , corrispondenti ai valori 0,1, 1, 10.

A destra: (notare la diversa scala) le linee di livello corrispondenti ai valori 10, 100, 500.

La linea tratteggiata è la circonferenza  $\partial B_1(0)$ .

PROPOSIZIONE 11.26. *Il nucleo di Poisson*

$$K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2}, \quad \mathbf{x} \in B_R(\mathbf{x}_0), \boldsymbol{\xi} \in \partial B_R(\mathbf{x}_0),$$

è, per ogni  $\boldsymbol{\xi}$  fissato, una funzione di classe  $C^\infty(B_R(\mathbf{x}_0))$  nella  $\mathbf{x}$ . Vale poi

$$\Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \text{in } B_R(\mathbf{x}_0). \quad (11.47)$$

DIMOSTRAZIONE. La regolarità asserita per  $K$  è ovvia. Va solo dimostrata la (11.47). Per semplicità di notazione e senza perdita di generalità assumiamo  $\mathbf{x}_0 = 0$ , e procediamo a derivare:

$$2\pi R \nabla_{\mathbf{x}} K = -2 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} - 2 \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^4} [R^2 - |\mathbf{x}|^2].$$

Per cui

$$\begin{aligned} 2\pi R \Delta_{\mathbf{x}} K &= 2\pi R \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\nabla_{\mathbf{x}} K) = -\frac{4}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2} + 4 \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^4} \\ &\quad - \frac{4}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^4} [R^2 - |\mathbf{x}|^2] + 4 \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^4} + 8 \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^6} [R^2 - |\mathbf{x}|^2] \\ &= \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^4} \left\{ -4|\mathbf{x}|^2 - 4|\boldsymbol{\xi}|^2 + 8\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} + 4R^2 - 4|\mathbf{x}|^2 + 8|\mathbf{x}|^2 - 8\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} \right\} = 0. \end{aligned}$$

□

Sia il numeratore che il denominatore di  $K$  vanno a zero per  $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$ . Si vede comunque che in effetti  $K$  diviene illimitata per  $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$ . È poi ovvio che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \text{se } \mathbf{y} \in \partial B_R(\mathbf{x}_0), \mathbf{y} \neq \boldsymbol{\xi}.$$

ESERCIZIO 11.27. Trovare in modo esplicito l'equazione delle curve di livello mostrate nella Figura 11.1.

Quindi spiegare che cosa è sbagliato nel seguente ragionamento: la  $K(\cdot, \xi)$  (per  $\xi$  fissato) è una funzione armonica nella regione interna a ciascuna curva di livello, e pertanto per il principio di massimo è costante in tale regione.  $\square$

In coordinate polari (con origine in  $\mathbf{x}_0$ , ossia  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ ), usando la notazione

$$\mathbf{x} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad \xi = (R \cos \theta, R \sin \theta), \quad (11.48)$$

e tenuto conto che

$$|\mathbf{x} - \xi|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi), \quad (11.49)$$

il nucleo di Poisson si esprime come

$$K(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)}, \quad r < R, -\pi \leq \varphi, \theta \leq \pi. \quad (11.50)$$

Allora

COROLLARIO 11.28. Vale per ogni  $0 < r < R$

$$1 = \frac{R}{r} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} K(\mathbf{x}, \xi) d\sigma_\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi} d\varphi. \quad (11.51)$$

DIMOSTRAZIONE. La seconda uguaglianza nella (11.51) è ovvia.

Per calcolare l'ultimo integrale nella (11.51) osserviamo che, per  $a > b > 0$  vale

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{\sin \varphi}{1+\cos \varphi} \right] \right\} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b \cos \varphi}, \quad -\pi < \varphi < \pi.$$

Quindi l'integrale in questione vale

$$\left[ 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{R^2 + r^2 + 2Rr}{R^2 - r^2} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \right] \right]_{-\pi+}^{\pi-} = 2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 2\pi. \quad \square$$

TEOREMA 11.29. Se  $u_0 \in C(\partial B_R(\mathbf{x}_0))$ , la funzione  $u$  definita da (11.46) appartiene a  $C^\infty(B_R(\mathbf{x}_0)) \cap C(\overline{B_R(\mathbf{x}_0)})$ , e risolve il problema (11.45).

DIMOSTRAZIONE. Teoremi noti garantiscono che l'integrale in (11.46) si può derivare (per  $\mathbf{x}$  all'interno della sfera  $B_R(\mathbf{x}_0)$ ) scambiando la derivata con il segno di integrale. Perciò  $u \in C^\infty(B_R(\mathbf{x}_0))$ , e

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} \Delta_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \xi) u_0(\xi) d\sigma = 0,$$

per la Proposizione 11.26.

Resta solo da provare che la  $u$  è continua fino su  $\partial B_R(\mathbf{x}_0)$ . Conviene passare a coordinate polari come in (11.48)–(11.50); poniamo anche

$$v(r, \varphi) = u(\mathbf{x});$$

qui

$$0 \leq r \leq R, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Si ha per la (11.46):

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta)} v_0(\theta) d\theta, \quad (11.52)$$

ove si è posto

$$v_0(\theta) = v(R, \theta) = u_0(R \cos \theta, R \sin \theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi;$$

la  $v_0$  risulta continua in  $[-\pi, \pi]$ , con  $v_0(-\pi) = v_0(\pi)$ , per la continuità di  $u_0$ , e può quindi essere estesa con continuità come funzione periodica su tutto  $\mathbf{R}$ , cosa che noi supporremo nel seguito. Cambiando variabile di integrazione (ma continuando a usare il vecchio nome di variabile  $\theta$ ), si ha

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta)} v_0(\varphi - \theta) d\theta. \quad (11.53)$$

Si noti che qui si sono usate anche le proprietà di periodicità dell'integrando (Lemma C.12). Dunque, ponendo

$$\varphi_r(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta)}, & -\pi \leq \theta \leq \pi, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si ha che

$$v(r, \varphi) = \varphi_r * v_0(\varphi), \quad 0 < r < R, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Per il Teorema 11.4, la  $v$  (e pertanto la  $u$ ) avrà la regolarità desiderata se si dimostreranno per i nuclei di convoluzione  $\varphi_r$  le proprietà (11.2)–(11.4). (In questa applicazione, i nuclei sono parametrizzati da  $r \rightarrow R$ , invece che da  $\lambda \rightarrow 0$ , ma è chiaro che questa è una formalità priva di rilievo.) Che i nuclei siano non negativi è ovvio dalla loro definizione. L'uguaglianza

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi_r(\theta) d\theta = 1,$$

si riduce alla (11.51).

Resta da provare la (11.4), che è del resto immediata se  $a \geq \pi$ . Se  $0 < a < \pi$ , vale (minimizzando il denominatore di  $\varphi_r$ )

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \varphi_r(\theta) d\theta &= \int_{-\infty}^{-a} \varphi_r(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_a^\pi \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta)} d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_a^\pi \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(a)} d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^\pi \frac{R^2 - r^2}{R^2 - R^2 \cos^2(a)} d\theta \\ &= \frac{\pi - a}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - R^2 \cos^2(a)} \rightarrow 0, \quad \text{per } r \rightarrow R. \end{aligned}$$

□

Una delle conseguenze del Teorema 11.29 è il seguente risultato di regolarizzazione.

**COROLLARIO 11.30.** *Se  $u$  è armonica in  $\Omega$  aperto, allora  $u \in C^\infty(\Omega)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Presa una qualunque sfera aperta  $B$  la cui chiusura giace in  $\Omega$ , consideriamo la soluzione  $w$  di

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{in } B, \\ w = u, & \text{su } \partial B. \end{cases}$$

Visto che  $u - w$  soddisfa il principio di massimo (vedi i teoremi 5.1 e 5.3), vale  $u = w$  in  $B$ . Perciò  $u \in C^\infty(B)$ , per il Teorema 11.29. L'arbitrarietà di  $B \subset \Omega$  completa la dimostrazione.  $\square$

### 11.6. Polinomi di Stieltjes

Si dice che una successione di funzioni  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  converge uniformemente su  $[a, b]$  alla funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , se

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \quad (11.54)$$

L'argomento che trattiamo qui è quello della approssimazione, nel senso della convergenza uniforme, di funzioni continue con funzioni 'ancora più regolari'.

**TEOREMA 11.31.** *Sia  $f \in C([a, b])$ , ove  $[a, b]$  è un intervallo chiuso e limitato di  $\mathbf{R}$ . Allora esiste una successione di polinomi  $\{P_n\}$  tale che*

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0, \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \quad (11.55)$$

I polinomi  $P_n$  possono essere scelti in diversi modi. Quelli che costruiamo qui si chiamano polinomi di Stieltjes (relativi a  $f$ ).

**DIMOSTRAZIONE.** A meno di omotetie e traslazioni, possiamo assumere che

$$[a, b] = \left[ -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right].$$

Inoltre, consideriamo  $f$  come una funzione uniformemente continua su tutto  $\mathbf{R}$ , semplicemente definendo

$$\begin{aligned} f(x) &= 2f\left(-\frac{1}{4}\right) \max(1 + 2x, 0), & x < -\frac{1}{4}; \\ f(x) &= 2f\left(\frac{1}{4}\right) \max(1 - 2x, 0), & x > \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Si noti che allora  $f(x) = 0$  se  $x \notin (-1/2, 1/2)$ .

Introduciamo i nuclei di approssimazione

$$K_n(x) = \begin{cases} k_n(1 - x^2)^n, & |x| \leq 1, \\ 0 & |x| > 1, \end{cases}$$

ove si sceglie

$$k_n^{-1} := \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx.$$

Controlliamo che la successione  $\{K_n\}$  soddisfi la definizione di nuclei di approssimazione: la (11.2) e la (11.3) sono ovvie; la (11.4) è ovvia se  $a \geq 1$ . Se  $0 < a < 1$ , osserviamo che

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, \infty)} K_n(x) = K_n(a) = k_n(1 - a^2)^n &= \frac{(1 - a^2)^n}{2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx} \\ &\leq \frac{(1 - a^2)^n}{2 \int_0^1 (1 - x)^n dx} = \frac{n+1}{2} (1 - a^2)^n. \end{aligned}$$

Dunque per  $n \rightarrow \infty$

$$\int_a^\infty K_n(x) dx = \int_a^1 K_n(x) dx \leq K_n(a)(1 - a) \leq \frac{(n+1)(1-a)}{2} (1 - a^2)^n \rightarrow 0.$$

In modo simile si dimostra che

$$\int_{-\infty}^{-a} K_n(x) dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dunque per il Teorema 11.3, sappiamo che

$$f_n(x) := f * K_n(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y) K_n(y) dy \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

per ogni fissato  $x \in \mathbf{R}$ . Di più, per il Teorema 11.4, usando anche l'Osservazione 11.14, sappiamo che la convergenza è uniforme sull'intervallo  $[-1/4, 1/4]$  (in realtà su ogni intervallo compatto di  $\mathbf{R}$ ).

Resta solo da dimostrare che la  $f_n$  è una successione di polinomi, il che *non* è vero su tutto  $\mathbf{R}$ . Definiamo allora

$$P_n(x) = f_n(x), \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

I  $P_n$  (che risultano definiti solo per  $x \in (-1/2, 1/2)$ ) si dicono polinomi di Stieltjes di  $f$ ; resta da vedere che sono davvero polinomi. Si ha

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \int_{\mathbf{R}} K_n(x-y) f(y) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} K_n(x-y) f(y) dy \\ &= k_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) [1 - (x-y)^2]^n dy, \end{aligned}$$

ove abbiamo fatto uso: a) del fatto che  $f$  si annulla fuori di  $(-1/2, 1/2)$ ; b) di  $|x| < 1/2$ , il che implica

$$|x-y| < 1, \quad \text{per } |y| < \frac{1}{2}.$$

Quindi per  $-1/2 < x < 1/2$ ,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= k_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) [1 - y^2 + 2xy - x^2]^n dy = k_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) \sum_{i=0}^{2n} q_{i,n}(y) x^i dy \\ &= \sum_{i=0}^{2n} \left( k_n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(y) q_{i,n}(y) dy \right) x^i =: \sum_{i=0}^{2n} \alpha_{i,n} x^i, \end{aligned}$$

ove i  $q_{i,n}$  sono polinomi opportuni, e le  $\alpha_{i,n}$  sono costanti reali definite dall'uguaglianza precedente.  $\square$

OSSERVAZIONE 11.32. Per convincersi che le  $f_n$  della dimostrazione del Teorema 11.31 non sono polinomi su tutto  $\mathbf{R}$ , basti osservare che per l'Osservazione 11.8 hanno supporto compatto in  $\mathbf{R}$ .  $\square$

Naturalmente il teorema precedente non può mantenersi valido su intervalli illimitati (si pensi per esempio al caso di  $f$  limitata, ma non costante). È possibile però impiegare il seguente procedimento per costruire una successione di polinomi che converga su ogni intervallo limitato. Questo procedimento permette di estrarre da una sequenza di successioni una successione con la proprietà desiderata.

COROLLARIO 11.33. *Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Allora esiste una successione di polinomi  $\{Q_m\}$  che converge uniformemente a  $f$  sui compatti di  $\mathbf{R}$ , cioè tale che, per ogni fissato  $a > 0$ ,*

$$\max_{x \in [-a, a]} |f(x) - Q_m(x)| \rightarrow 0, \quad \text{per } m \rightarrow \infty. \quad (11.56)$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema precedente, per ogni fissato  $m = 1, 2, \dots$ , esiste una successione di polinomi  $\{P_n^m\}_{n=1}^\infty$  tale che  $P_n^m$  converge uniformemente a  $f$  su  $[-m, m]$ , per  $n \rightarrow \infty$ . Perciò è possibile scegliere, per ogni assegnato  $m$ , un intero  $n(m)$  tale che

$$\max_{x \in [-m, m]} |f(x) - P_{n(m)}^m| \leq \frac{1}{m}. \quad (11.57)$$

Definiamo ora  $Q_m = P_{n(m)}^m$ . Fissiamo  $a > 0$ . Per  $m \geq a$  vale che  $[-a, a] \subset [-m, m]$ , e quindi

$$\max_{x \in [-a, a]} |f(x) - Q_m(x)| \leq \max_{x \in [-m, m]} |f(x) - Q_m(x)| \leq \frac{1}{m}.$$

La (11.56) risulta così dimostrata.  $\square$

Infine, con una piccola modifica della dimostrazione del Corollario 11.33, è possibile dimostrare

COROLLARIO 11.34. *Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Allora esiste una successione di funzioni  $\{f_m\} \subset C_0^\infty(\mathbf{R})$  che converge uniformemente a  $f$  sui compatti di  $\mathbf{R}$ .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una funzione  $g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$  tale che

$$g(x) = 1, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad g(x) = 0, \quad |x| \geq 2.$$

Chiaramente la funzione  $g_m(x) = g(x/m)$  è ancora di classe  $C^\infty$ , e inoltre

$$g_m(x) = 1, \quad -m \leq x \leq m; \quad g_m(x) = 0, \quad |x| \geq 2m.$$

È dunque immediato vedere che la successione  $f_m = g_m Q_m$ , ove i  $Q_m$  sono i polinomi costruiti nella dimostrazione del Corollario 11.33, soddisfa l'enunciato.  $\square$

## Equazioni non omogenee

### 12.1. Il principio di Duhamel

Secondo il *principio di Duhamel* la soluzione di un problema con sorgente non nulla si ottiene come sovrapposizione di soluzioni di problemi con sorgente nulla ma dati ‘iniziali’ corrispondenti a un ‘impulso’ pari alla sorgente stessa.

ESEMPIO 12.1. Consideriamo il problema di Cauchy per e.d.o.:

$$\frac{dy}{dt} = ay + f(t), \quad (12.1)$$

$$y(0) = 0, \quad (12.2)$$

ove  $a \in (0, \infty)$  e  $f \in C([0, \infty))$ .

Applicando il principio di Duhamel risolviamo per ogni  $0 < \tau < t$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(t; \tau) &= az(t; \tau), \\ z(\tau; \tau) &= f(\tau). \end{aligned}$$

La soluzione è

$$z(t; \tau) = f(\tau)e^{a(t-\tau)}, \quad t \geq \tau.$$

Sovrapponendo si ha

$$y(t) = \int_0^t z(t; \tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)e^{a(t-\tau)} d\tau, \quad t \geq 0,$$

che è la soluzione cercata di (12.1)–(12.2). □

### 12.2. Equazione delle onde

Per linearità la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x, t), & -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

si può scrivere come  $u = v + w$ , ove

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0, & -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ v(x, 0) &= u_0(x), & -\infty < x < \infty, \\ v_t(x, 0) &= u_1(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

e

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \quad (12.3)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (12.4)$$

$$w_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (12.5)$$

Sappiamo già come ottenere  $v$  (vedi Capitolo 10).

Qui mostreremo come rappresentare  $w$ . L'idea di partenza è di applicare il [principio di Duhamel](#), e quindi di scrivere

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) d\tau, \quad (12.6)$$

ossia di ottenere  $w$  come somma, o per la precisione, come integrale di 'contributi'  $z(x, t; \tau)$  presi a tutti i tempi  $0 < \tau < t$ . Nella (12.6) integriamo su  $(0, t)$ , piuttosto che per esempio su  $(0, \infty)$ , per ragioni ovvie dal punto di vista modellistico: è ragionevole supporre che il valore della soluzione di un'equazione di evoluzione sia influenzato solo dai dati presi sull'intervallo temporale che intercorre tra l'istante iniziale e quello attuale.

Intanto la (12.6) risolve senz'altro la (12.4). Calcoliamo poi, assumendo che  $z$  sia regolare a sufficienza,

$$w_t(x, t) = z(x, t; t) + \int_0^t z_t(x, t; \tau) d\tau.$$

Prendiamo

$$z(x, t; t) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (12.7)$$

per ogni  $T > t > 0$ . Allora anche (12.5) è soddisfatta. Proseguendo nei calcoli si ha

$$w_{tt}(x, t) = z_t(x, t; t) + \int_0^t z_{tt}(x, t; \tau) d\tau,$$

$$w_{xx}(x, t) = \int_0^t z_{xx}(x, t; \tau) d\tau.$$

Dunque, affinché la (12.3) sia soddisfatta, deve essere

$$z_t(x, t; t) + \int_0^t [z_{tt} - c^2 z_{xx}](x, t; \tau) d\tau = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, 0 < t < T.$$

Alla (12.7) allora aggiungiamo le altre due condizioni

$$z_{tt}(x, t; \tau) - c^2 z_{xx}(x, t; \tau) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tau < t < T, \quad (12.8)$$

$$z_t(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \quad -\infty < x < \infty. \quad (12.9)$$

Come è noto, le (12.7), (12.8), (12.9) determinano la  $z$  come soluzione di un problema di Cauchy con istante iniziale  $\tau$ . Dalla formula di D'Alembert si

ottiene

$$z(x, t; \tau) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds.$$

Sostituendo nella (12.6) si ha infine

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau. \quad (12.10)$$

Ritroviamo il risultato in modo rigoroso:

**TEOREMA 12.2.** *Siano  $f, f_x \in C(\mathbf{R} \times [0, T])$ . Allora la  $w$  data dalla (12.10) è in  $C^2(\mathbf{R} \times [0, T])$  e risolve (12.3)–(12.5).*

**DIMOSTRAZIONE.** I calcoli che hanno portato alla (12.10) sono in parte formali. Conviene quindi partire proprio dalla (12.10), che definisce senz'altro una  $w \in C(\mathbf{R} \times [0, T])$ , se  $f \in C(\mathbf{R} \times [0, T])$ . Sotto la medesima ipotesi

$$w_x(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left\{ f(x + c(t - \tau), \tau) - f(x - c(t - \tau), \tau) \right\} d\tau,$$

$$w_t(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ f(x + c(t - \tau), \tau) + f(x - c(t - \tau), \tau) \right\} d\tau.$$

Se poi  $f_x \in C(\mathbf{R} \times [0, T])$ , vale

$$w_{xx}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left\{ f_x(x + c(t - \tau), \tau) - f_x(x - c(t - \tau), \tau) \right\} d\tau,$$

$$w_{tt}(x, t) = f(x, t) + \frac{c}{2} \int_0^t \left\{ f_x(x + c(t - \tau), \tau) - f_x(x - c(t - \tau), \tau) \right\} d\tau,$$

$$w_{xt}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ f_x(x + c(t - \tau), \tau) + f_x(x - c(t - \tau), \tau) \right\} d\tau.$$

La tesi è così dimostrata. □

### 12.3. Equazione del calore

Anche qui scriviamo la soluzione  $u$  di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x, t), & -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

come  $u = v + w$ , ove

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0, & -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \\ v(x, 0) &= v_0(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned}$$

e

$$w_t - w_{xx} = f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, 0 < t < T, \quad (12.11)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (12.12)$$

La  $v$  è stata ottenuta nel Capitolo 11.

Ragionando come nella Sezione 12.2 si vede che

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) d\tau,$$

ove  $z$  risolve

$$\begin{aligned} z_t(x, t; \tau) - z_{xx}(x, t; \tau) &= 0, & -\infty < x < \infty, \tau < t < T, \\ z(x, \tau; \tau) &= f(x, \tau), & -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Dunque, per la (11.28),

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (12.13)$$

ove  $\Gamma$  è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore. La dimostrazione rigorosa della validità della (12.13), sotto le ipotesi opportune, si presenta più complessa di quella del Teorema 12.2, a causa dell'irregolarità dell'integrando in (12.13). Diamo un risultato basato su ipotesi sufficienti, ma non ottimali.

**TEOREMA 12.3.** *Sia  $f \in C(\mathbf{R} \times [0, T])$ , limitata e globalmente lipschitziana in  $\mathbf{R} \times [0, T]$  rispetto alla variabile  $x$ . Allora la  $w$  data dalla (12.13) soddisfa  $w \in C^{2,1}(\mathbf{R} \times [0, T])$  e risolve (12.11)–(12.12).*

Presentiamo di seguito la dimostrazione pressoché completa del teorema, in parte con lo scopo di mostrare come l'approccio basato sulle rappresentazioni esplicite di soluzioni conduce a calcoli tutt'altro che banali anche nelle situazioni più semplici. È vero che molti dei conti necessari possono essere sistematizzati nell'ambito della teoria dell'integrazione di Lebesgue (cioè seguono da risultati generali in quell'ambito). È anche vero però che con quella teoria a disposizione si può passare a un approccio molto più flessibile e potente alle e.d.p., basato sulle soluzioni deboli; per un cenno a queste ultime, rimandiamo al Capitolo 18.

**DIMOSTRAZIONE.** Derivando l'espressione esplicita di  $\Gamma$  si ottiene per  $t > 0$ ,  $x \in \mathbf{R}$ :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t) = -\frac{x}{4\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (12.14)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t) = \left\{ -\frac{1}{4\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi t^{\frac{5}{2}}}} \right\} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \quad (12.15)$$

Quindi, per una costante  $C > 0$ ,

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x, t) \right| \leq C \frac{|x|}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (12.16)$$

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x, t) \right| = \left| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq C \left\{ \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{t^{\frac{5}{2}}} \right\} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \quad (12.17)$$

Gli usuali teoremi di derivazione sotto il segno di integrale non si possono quindi applicare a  $w$ . Approssimiamo perciò la  $w$  con funzioni più regolari. Definiamo

$$w_n(x, t) = \int_0^{t-\frac{1}{n}} \int_{B_n} \Gamma(x - \xi, t - \tau) d\xi d\tau,$$

per  $t > 1/n$ , e  $B_n = \{|\xi| \leq n\}$ . Proprio per le (12.14), (12.15), ciascuna  $w_n$  si può derivare sotto il segno d'integrale. Inoltre, se  $M = \sup_{\mathbf{R}} |f|$ ,

$$\begin{aligned} |w(x, t) - w_n(x, t)| &\leq \int_{t-\frac{1}{n}}^t \int_{\mathbf{R}} \Gamma(x - \xi, t - \tau) |f(\xi, \tau)| d\xi d\tau \\ &\quad + \int_0^{t-\frac{1}{n}} \int_{\{|\xi| > n\}} \Gamma(x - \xi, t - \tau) |f(\xi, \tau)| d\xi d\tau \\ &\leq \frac{M}{n} + Mt \sup_{\substack{0 < \tau < t \\ \{|\xi| > n\}}} \int \Gamma(x - \xi, t - \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Si ha però, ponendo  $z = (x - \xi)/2\sqrt{t - \tau}$ ,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{0 < \tau < t \\ \{|\xi| > n\}}} \int \frac{1}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4(t - \tau)}} d\xi &= \sup_{0 < \tau < t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|2z\sqrt{t - \tau} - x| > n} e^{-z^2} dz \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|z| > \frac{n + |x|}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \rightarrow 0, \end{aligned}$$

per  $n \rightarrow \infty$ . Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x, t) = w(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, T > t > 0.$$

Mostriamo ora che anche le derivate di  $w_n$  convergono alle derivate corrispondenti di  $w$ . Calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t) &= \int_{B_n} \Gamma\left(x - \xi, \frac{1}{n}\right) f\left(\xi, t - \frac{1}{n}\right) d\xi \\ &\quad + \int_0^{t-\frac{1}{n}} \int_{B_n} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau =: I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Si ha che

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbf{R}} \Gamma\left(x - \xi, \frac{1}{n}\right) f\left(\xi, t - \frac{1}{n}\right) d\xi \\ &\quad - \int_{\{|\xi| > n\}} \Gamma\left(x - \xi, \frac{1}{n}\right) f\left(\xi, t - \frac{1}{n}\right) d\xi =: I_{11} + I_{12}, \end{aligned}$$

ove  $I_{12} \rightarrow 0$  con calcoli simili a quelli sopra, e

$$I_{11} \rightarrow f(x, t), \quad (12.20)$$

per l'Osservazione 11.13.

Si ha poi

$$I_2 = \int_0^{t-\frac{1}{n}} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau + I_{22} =: I_{21} + I_{22},$$

ove

$$\begin{aligned}
|I_{22}| &= \left| \int_0^{t-\frac{1}{n}} \int_{\{|\xi|>n\}} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau \right| \\
&\leq MC \int_0^t \int_{\{|\xi|>n\}} \left\{ \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(x-\xi)^2}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}} \right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \, d\xi \, d\tau \\
&\leq MC \int_0^t \int_{|z|>\frac{n+|x|}{2\sqrt{t-\tau}}} \frac{1+z^2}{t-\tau} e^{-z^2} \, dz \, d\tau \\
&\leq MC \int_0^t \frac{e^{-\frac{n^2}{8(t-\tau)}}}{t-\tau} \, d\tau \cdot \int_{\mathbf{R}} (1+z^2) e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \\
&\leq \text{costante } t \sup_{0<\tau<t} \frac{e^{-\frac{n^2}{8(t-\tau)}}}{t-\tau} \leq \text{costante } \frac{t}{n^2} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Stabilito ciò, facciamo l'essenziale osservazione che

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{\partial^{i+j} \Gamma}{\partial t^i \partial x^j}(x-\xi, t) \, d\xi = 0, \quad \text{per } t > 0, \text{ e } i+j > 0. \quad (12.21)$$

Questo segue subito derivando

$$\int_{\mathbf{R}} \Gamma(x-\xi, t) \, d\xi = 1, \quad t > 0.$$

Dunque si può scrivere

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \int_0^{t-\frac{1}{n}} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x-\xi, t-\tau) [f(\xi, \tau) - f(x, \tau)] \, d\xi \, d\tau \\
&= \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \dots - \int_{t-\frac{1}{n}}^t \int_{\mathbf{R}} \dots = I_{211} + I_{212}.
\end{aligned}$$

Mostriamo che  $I_{212} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Usando la (12.17) e la *lipschitzianità* di  $f$ , si ottiene per un  $C > 0$  opportuno,

$$\begin{aligned}
|I_{212}| &\leq C \int_{t-\frac{1}{n}}^t \int_{\mathbf{R}} \left\{ \frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} + \frac{|x-\xi|^3}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}} \right\} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \, d\xi \, d\tau \\
&\leq C \int_{t-\frac{1}{n}}^t \int_{\mathbf{R}} \frac{|z| + |z|^3}{\sqrt{t-\tau}} e^{-z^2} \, dz \, d\tau \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Si ha infine che per  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\partial w_n}{\partial t}(x, t) = I_{11} + I_{12} + I_{211} + I_{212} + I_{22} \rightarrow f(x, t) + 0 + I_{211} + 0 + 0 =: V(x, t), \quad (12.22)$$

ove

$$V(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(x-\xi, t-\tau) [f(\xi, \tau) - f(x, \tau)] \, d\xi \, d\tau.$$

Si possono ripercorrere i calcoli precedenti per verificare che in realtà essi provano che la convergenza in (12.22) è di fatto uniforme per  $(x, t)$  in un compatto qualunque di  $\mathbf{R} \times (0, T)$ .  
Dunque

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = V(x, t).$$

In modo analogo si fa vedere che

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(x - \xi, t - \tau) [f(\xi, \tau) - f(x, \tau)] d\xi d\tau.$$

Dunque per  $0 < t < T$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$w_t - w_{xx} = f(x, t)$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \left\{ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} \right\} (x - \xi, t - \tau) [f(\xi, \tau) - f(x, \tau)] d\xi d\tau = f(x, t).$$

□



## Parte 5

# Studio del comportamento delle soluzioni



## Comportamenti asintotici

### 13.1. Problema della lunghezza critica

Consideriamo il problema

$$u_t - Du_{xx} = cu, \quad \text{in } Q_\infty = (0, L) \times (0, \infty), \quad (13.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (13.2)$$

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (13.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \quad (13.4)$$

Qui  $c, L$  sono costanti positive.

È chiaro che nel modello (13.1)–(13.4) sono presenti due effetti in competizione tra di loro: quello della sorgente  $cu$  nell'equazione a derivate parziali, che tende a far crescere  $|u|$ , e quello delle condizioni al contorno, che tendono a mantenere  $u$  vicino al valore nullo. Si noti infatti che il termine  $cu$  è positivo [negativo] ove  $u$  è positivo [negativo].

Per accertare quale dei due effetti prevalga nel limite asintotico  $t \rightarrow \infty$ , cerchiamo di sviluppare  $u$  in serie, come visto sopra. Per ricondursi a un problema per l'equazione del calore, introduciamo la nuova incognita

$$v(x, t) = e^{-ct}u(x, t),$$

che soddisfa

$$v_t - Dv_{xx} = 0, \quad \text{in } Q_\infty = (0, L) \times (0, \infty), \quad (13.5)$$

$$v(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (13.6)$$

$$v(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (13.7)$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \quad (13.8)$$

Procedendo come nelle Sezioni 9.1, 9.2, si vede che

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-n^2 \frac{\pi^2}{L^2} Dt} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right), \quad (13.9)$$

ove i coefficienti  $\alpha_n$  sono dati da

$$\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx, \quad n \geq 1.$$

Avrà particolare importanza qui il primo di questi coefficienti, ossia

$$\alpha_1 = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) dx.$$

Dunque, dalla (13.9) e dalla definizione di  $v$ , segue che

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(c-n^2 \frac{\pi^2}{L^2} D)t} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \\ &= \alpha_1 e^{(c-\frac{\pi^2}{L^2} D)t} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n e^{(c-n^2 \frac{\pi^2}{L^2} D)t} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad (13.10) \\ &= \alpha_1 e^{(c-\frac{\pi^2}{L^2} D)t} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) + R(x, t), \end{aligned}$$

ove la serie resto  $R(x, t)$  soddisfa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(x, t)}{e^{(c-\frac{\pi^2}{L^2} D)t}} = 0, \quad 0 < x < L. \quad (13.11)$$

Il comportamento asintotico per  $t \rightarrow \infty$  della soluzione  $u$  quindi è determinato, nel caso generico  $\alpha_1 \neq 0$ , dal segno della quantità

$$c - \frac{\pi^2}{L^2} D.$$

In particolare, avendo definito la *lunghezza critica*

$$L_c = \pi \sqrt{\frac{D}{c}}$$

(si verifichi dal punto di vista dimensionale questa definizione), si hanno dalla (13.10) i tre casi seguenti.

(1)  $L < L_c$ : in questo caso prevale l'effetto delle condizioni al contorno, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \quad (13.12)$$

(2)  $L > L_c$ : in questo caso prevale l'effetto del termine di sorgente, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \pm \infty, \quad (13.13)$$

ove il segno a destra nella relazione di limite va scelto concorde con quello di  $\alpha_1$ , nel caso generico  $\alpha_1 \neq 0$ .

(3)  $L = L_c$ : in questo caso i due effetti si bilanciano e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right). \quad (13.14)$$

ESERCIZIO 13.1. Che cosa succede nel caso non generico  $\alpha_1 = 0$ ?  $\square$

OSSERVAZIONE 13.2. Possiamo ottenere la funzione limite in (13.14) anche risolvendo la versione stazionaria del problema (13.1)–(13.4), ossia

$$-DU_{xx} = cU, \quad 0 < x < L, \quad (13.15)$$

$$U(0) = 0, \quad (13.16)$$

$$U(L) = 0. \quad (13.17)$$

Questo è un tipico problema agli autovalori, che ha una soluzione diversa da quella nulla solo se  $c/D$  e  $L$  sono legate da certe relazioni, per esempio la  $L = L_c$ . In questo caso anzi vi sono infinite soluzioni, tutte multiple l'una dell'altra, tra cui quella in (13.14).  $\square$

## Parte 6

# Trasformate di funzioni



## La trasformata di Fourier

### 14.1. Definizione

DEFINIZIONE 14.1. Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  integrabile su  $\mathbf{R}$ . Definiamo allora per ogni  $\omega \in \mathbf{R}$

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx.$$

La funzione  $\mathcal{F}[f] : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  si dice *trasformata di Fourier* di  $f$ , e si denota anche con  $\hat{f}$ .  $\square$

Talvolta, se necessario, si userà la notazione  $\mathcal{F}[f(x)](\omega)$  (di per sé abusiva) per chiarire la dipendenza da  $x$  di  $f$ .

OSSERVAZIONE 14.2. Si potrebbe dimostrare che la trasformata di Fourier di una funzione integrabile è continua in  $\mathbf{R}$  e infinitesima per  $\omega \rightarrow \pm\infty$ .  $\square$

### 14.2. Proprietà elementari della trasformata di Fourier

**14.2.1. Linearità.**  $\mathcal{F}$  è lineare, ossia se  $f_1, f_2$  sono integrabili su  $\mathbf{R}$  e  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ , allora

$$\mathcal{F}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{F}[f_1] + c_2 \mathcal{F}[f_2]. \quad (14.1)$$

**14.2.2. Trasformazione di derivate.** Se  $f \in C^1(\mathbf{R})$ , e  $f, f'$  sono integrabili su  $\mathbf{R}$ , allora

$$\mathcal{F}[f'](\omega) = -i\omega \mathcal{F}[f](\omega), \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (14.2)$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo due successioni  $c_n^+ \rightarrow \infty, c_n^- \rightarrow -\infty$  tali che  $f$  abbia limite zero lungo di esse (vedi Lemma A.13). Allora, integrando per parti,

$$\int_{c_n^-}^{c_n^+} e^{i\omega x} f'(x) dx = \left[ e^{i\omega x} f(x) \right]_{c_n^-}^{c_n^+} - \int_{c_n^-}^{c_n^+} i\omega e^{i\omega x} f(x) dx.$$

Per  $n \rightarrow \infty$  si ottiene la tesi.  $\square$

Le trasformate di derivate di ordine superiore si possono ottenere reiterando questo risultato; per esempio, per  $\omega \in \mathbf{R}$

$$\mathcal{F}[f''](\omega) = -i\omega \mathcal{F}[f'](\omega) = (-i\omega)(-i\omega) \mathcal{F}[f](\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}[f](\omega). \quad (14.3)$$

**14.2.3. Antitrasformazione.** Se  $f$  è integrabile su  $\mathbf{R}$  e localmente lip-schitziana in  $\mathbf{R}$ , allora, per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k e^{-i\omega x} \mathcal{F}[f](\omega) d\omega. \quad (14.4)$$

Allora, se  $\mathcal{F}[f]$  è integrabile su  $\mathbf{R}$ , si può scrivere

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \mathcal{F}[f](\omega) d\omega, \quad (14.5)$$

che costituisce la *formula di inversione* della trasformata di Fourier.

**14.2.4. Trasformazione di convoluzioni.** Se  $f$ ,  $g$ , e  $f * g$  sono integrabili su  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]. \quad (14.6)$$

DIMOSTRAZIONE. Vale, per definizione di  $\mathcal{F}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) dy dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x-y)g(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega y} e^{i\omega z} f(z)g(y) dz dy = \mathcal{F}[f](\omega) \mathcal{F}[g](\omega). \end{aligned}$$

□

**14.2.5. Cambiamenti di variabili.** Vale, se  $f$  è integrabile su  $\mathbf{R}$ , e  $a \neq 0$ ,  $b$  sono numeri reali,

$$\mathcal{F}[f(ax-b)](\omega) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (14.7)$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(ax-b) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\left(\frac{y}{a} + \frac{b}{a}\right)} f(y) dy = \frac{1}{|a|} e^{\frac{i\omega b}{a}} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

□

**14.2.6. Derivazione di trasformate.** Definiamo  $g(x) = xf(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ . Se  $f$  e  $g$  sono integrabili su  $\mathbf{R}$ , allora  $\mathcal{F}[f]$  è derivabile in  $\mathbf{R}$  e

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}[ig](\omega) = \mathcal{F}[ixf(x)](\omega). \quad (14.8)$$

### 14.3. Applicazione per la risoluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione del calore

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (14.9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (14.10)$$

ove  $u_0$  è una funzione continua e limitata su  $\mathbf{R}$ . Richiediamo anche che  $u$  sia limitata.

Come nel Capitolo 11, cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(x, t) = \psi * u_0(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi,$$

ove  $\psi$  va determinata. Lo faremo qui con un argomento indipendente da quello svolto nella Sottosezione 11.3.2. Ricordiamo che  $\{\psi(\cdot, t)\}$  è una famiglia di nuclei di approssimazione per  $t \rightarrow 0+$  (si veda la Sezione 11.1).

Riscriviamo dunque la (14.9) come

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi * u_0 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi * u_0 = \psi_t * u_0 - \psi_{xx} * u_0 = 0,$$

e applichiamo la trasformazione di Fourier *in*  $x$ ; nel seguito intendiamo sempre che  $\mathcal{F}$  è la trasformata di Fourier in  $x$ . Usando le proprietà (14.3) e (14.6) si ottiene

$$\mathcal{F}[\psi_t] \mathcal{F}[u_0] + \omega^2 \mathcal{F}[\psi] \mathcal{F}[u_0] = 0, \quad (14.11)$$

per  $\omega \in \mathbf{R}$ ,  $t > 0$ . Visto che

$$\mathcal{F}[\psi_t](\omega, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \psi_t(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \psi(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[\psi](\omega, t),$$

si ha da (14.11), ponendo

$$G(\omega, t) = \mathcal{F}[\psi](\omega, t),$$

che

$$G_t(\omega, t) = -\omega^2 G(\omega, t), \quad -\infty < \omega < \infty, t > 0. \quad (14.12)$$

Da qui segue subito che

$$G(\omega, t) = G(\omega, 0) e^{-\omega^2 t}, \quad -\infty < \omega < \infty, t \geq 0. \quad (14.13)$$

D'altra parte, visto che  $u = \psi * u_0 \rightarrow u_0$  per  $t \rightarrow 0$ , dovremo avere

$$\mathcal{F}[u](\omega, t) = \mathcal{F}[\psi](\omega, t) \mathcal{F}[u_0](\omega) \rightarrow \mathcal{F}[u_0](\omega), \quad t \rightarrow 0,$$

ossia  $G(\omega, 0) = 1$ . Dunque

$$G(\omega, t) = e^{-\omega^2 t}, \quad -\infty < \omega < \infty, t \geq 0. \quad (14.14)$$

Si tratta ora di trovare la  $\psi$  conoscendone la trasformata di Fourier  $G$ . Questo si può fare consultando le apposite tavole di trasformate e antitrasformate, o usando la (14.5) e tecniche di analisi complessa.

In alternativa, si può procedere come segue. L'idea è di ricavare una e.d.o. per  $\psi$  come funzione di  $x$ , sfruttando la forma specifica della (14.5); questa tecnica funziona spesso per il calcolo di integrali, su domini illimitati, di funzioni di cui non si riesce a trovare una primitiva.

A partire dalla (14.5), otteniamo, poiché la parte contenente  $\sin(\omega x)$  è dispari,

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-\omega^2 t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) e^{-\omega^2 t} d\omega \\ &= \frac{t}{\pi x} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \sin(\omega x) e^{-\omega^2 t} d\omega, \quad (14.15)\end{aligned}$$

ove abbiamo integrato per parti (in modo non rigoroso, possiamo dire che i valori agli estremi  $\pm\infty$  sono nulli). D'altra parte

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \sin(\omega x) e^{-\omega^2 t} d\omega. \quad (14.16)$$

Dalle (14.15), (14.16) segue

$$\psi_x(x, t) = -\frac{x}{2t} \psi(x, t), \quad -\infty < x < \infty;$$

questa è una e.d.o. del primo ordine, che integrata dà

$$\psi(x, t) = \psi(0, t) e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Infine, dalla (14.5),

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} d\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}.$$

Perciò si ottiene per la  $\psi$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad (14.17)$$

cioè la forma ben nota della soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

#### 14.4. Applicazione per la risoluzione del problema nel semipiano per l'equazione di Laplace

Consideriamo il problema nel semipiano  $y > 0$  per l'equazione di Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, y > 0, \quad (14.18)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (14.19)$$

ove  $u_0$  è una funzione continua e limitata su  $\mathbf{R}$ . Richiediamo anche che  $u$  sia limitata.

Come nel Capitolo 11, cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(x, y) = \psi * u_0(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x - \xi, y) u_0(\xi) d\xi,$$

ove  $\psi$  va determinata (si veda la (11.23)). Lo faremo qui con un argomento indipendente da quello svolto nella Sezione 11.2. Ricordiamo che  $\{\psi(\cdot, y)\}$  è una famiglia di nuclei di approssimazione per  $y \rightarrow 0+$  (si veda la Sezione 11.1).

Riscriviamo dunque la (14.18) come

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi * u_0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi * u_0 = \psi_{xx} * u_0 + \psi_{yy} * u_0 = 0,$$

e applichiamo la trasformazione di Fourier *in x*. Usando le proprietà (14.3) e (14.6) si ottiene

$$\mathcal{F}[\psi_{yy}]\mathcal{F}[u_0] - \omega^2 \mathcal{F}[\psi]\mathcal{F}[u_0] = 0, \quad (14.20)$$

per  $\omega \in \mathbf{R}$ ,  $t > 0$ . Visto che

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\psi_{yy}](\omega, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \psi_{yy}(x, y) dx \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \psi(x, y) dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{F}[\psi](\omega, y), \end{aligned}$$

si ha da (14.20), ponendo

$$G(\omega, y) = \mathcal{F}[\psi](\omega, y),$$

che

$$G_{yy}(\omega, y) = \omega^2 G(\omega, y) = |\omega|^2 G(\omega, y), \quad -\infty < \omega < \infty, y > 0. \quad (14.21)$$

Integriamo in  $y$  trovando

$$G(\omega, y) = c_1(\omega)e^{|\omega|y} + c_2(\omega)e^{-|\omega|y}, \quad y > 0, \quad (14.22)$$

per ogni fissato  $\omega \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ . Tuttavia deve valere per ogni  $\omega$  fissato

$$|G(\omega, y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \psi(x, y) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dx = 1. \quad (14.23)$$

Confrontando le (14.22) e (14.23) si ha subito che  $c_1(\omega) = 0$ , se  $\omega \neq 0$ . D'altra parte si vede come nella Sezione 14.3 che deve valere  $G(\omega, 0) = 1$  per ogni  $\omega$ , il che implica che  $c_2(\omega) = 1$ , se  $\omega \neq 0$ . Il valore di  $G$  per  $\omega = 0$  è irrilevante nella formula (14.5) che usiamo sotto.

Quindi, ragionando come in (14.15), si ottiene appunto dalla (14.5)

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-|\omega|y} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\omega x) e^{-\omega y} d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (14.24) \end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza segue da una usuale integrazione per parti.



## La trasformata di Laplace

### 15.1. Definizione

DEFINIZIONE 15.1. Sia  $f \in C([0, \infty))$ , ed esista  $s_0 \in \mathbf{R}$  tale che per  $s > s_0$  la funzione  $x \mapsto e^{-sx} f(x)$  è integrabile in  $[0, \infty)$ . Allora si pone

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad s > s_0.$$

La funzione  $\mathcal{L}[f]$  si dice trasformata di Laplace di  $f$ . □

Talvolta, se necessario, si userà la notazione  $\mathcal{L}[f(x)](s)$  (di per sé abusiva) per chiarire la dipendenza da  $x$  di  $f$ .

Formalmente si ha, per  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{F}[f\chi_{[0, \infty)}](is), \quad (15.1)$$

ove  $\mathcal{F}$  è la trasformata di Fourier (vedi Capitolo 14).

OSSERVAZIONE 15.2. Si potrebbe dimostrare che la trasformata di Laplace di  $f$  è continua in  $s > s_0$  e infinitesima per  $s \rightarrow \infty$ . □

### 15.2. Proprietà elementari della trasformata di Laplace

**15.2.1. Linearità.**  $\mathcal{L}$  è lineare, ossia se  $e^{-sx} f_1(x)$ ,  $e^{-sx} f_2(x)$  sono integrabili su  $[0, \infty)$  e  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ , allora

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2](s) = c_1 \mathcal{L}[f_1](s) + c_2 \mathcal{L}[f_2](s). \quad (15.2)$$

**15.2.2. Trasformazione di derivate.** Se  $f \in C^1([0, \infty)$ , e

$$e^{-sx} f(x), \quad e^{-sx} f'(x)$$

sono integrabili su  $[0, \infty)$ , allora

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0). \quad (15.3)$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo una successione  $c_n^+ \rightarrow \infty$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-sc_n^+} f(c_n^+) = 0$$

(vedi Lemma A.13). Allora, integrando per parti,

$$\int_0^{c_n^+} e^{-sx} f'(x) dx = [e^{-sx} f(x)]_0^{c_n^+} - \int_0^{c_n^+} (-s)e^{-sx} f(x) dx.$$

Per  $n \rightarrow \infty$  si ottiene la tesi. □

Le trasformate di derivate di ordine superiore si possono ottenere reiterando questo risultato; per esempio,

$$\mathcal{L}[f''](s) = s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0). \quad (15.4)$$

**15.2.3. Antitrasformazione.** Se  $f$  è localmente lipschitziana in  $[0, \infty)$ , e  $e^{-sx}f(x)$  è integrabile su  $[0, \infty)$ , per ogni  $x \geq 0$  vale

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-k}^k \mathcal{L}[f](s + it)e^{(s+it)x} dt. \quad (15.5)$$

che costituisce la *formula di inversione* della trasformata di Laplace.

**15.2.4. Trasformazione di convoluzioni.** Se

$$e^{-sx}f(x), \quad e^{-sx}g(x), \quad e^{-sx}(f * g)(x),$$

sono integrabili su  $[0, \infty)$ , con  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  tali che  $f(x)$  e  $g(x)$  sono nulle per  $x < 0$ , allora

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[g](s). \quad (15.6)$$

La dimostrazione è analoga a quella di (14.6).

**15.2.5. Cambiamenti di variabili.** Sia  $e^{-sx}f(x)$  integrabile su  $[0, \infty)$ , e siano  $a > 0$ ,  $b \geq 0$  numeri reali; definiamo  $f(x) = 0$  per  $x < 0$ . Allora

$$\mathcal{L}[f(ax - b)](s) = \frac{1}{a}e^{-\frac{sb}{a}}\mathcal{L}\left[f\right]\left(\frac{s}{a}\right), \quad (15.7)$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}f(ax - b) dx = \frac{1}{a} \int_{-b}^{\infty} e^{-s(\frac{y}{a} + \frac{b}{a})} f(y) dy = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-s(\frac{y}{a} + \frac{b}{a})} f(y) dy,$$

che dà la tesi. □

OSSERVAZIONE 15.3. Siano  $h$  e  $k$  due funzioni limitate e integrabili su  $\mathbf{R}$ , entrambe nulle su  $(-\infty, 0)$ . Allora

$$h * k(x) = \int_0^x h(x - \xi)k(\xi) d\xi. \quad (15.8)$$

Infatti, si ha per la definizione di convoluzione

$$h * k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi)k(\xi) d\xi,$$

ove tuttavia l'integrando è nullo per  $\xi < 0$  (perché  $k(\xi) = 0$ ), e per  $\xi > x$  (perché  $h(x - \xi) = 0$ ). Questo dà subito la (15.8). □

### 15.3. Applicazioni alle equazioni differenziali ordinarie

Consideriamo il problema di Cauchy per e.d.o.:

$$y'' - 3y' + 2y = f(x), \quad x > 0, \quad (15.9)$$

$$y(0) = 0, \quad (15.10)$$

$$y'(0) = 0, \quad (15.11)$$

ove  $f \in C([0, \infty))$ .

Applichiamo la trasformazione di Laplace alla e.d.o., denotando con  $Y [F]$  la trasformata di  $y [f]$ . Si ottiene per le (15.3) e (15.4)

$$s^2 Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s) = F(s),$$

da cui

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 - 3s + 2}, \quad (15.12)$$

ove il denominatore è senz'altro positivo per  $s > 2$ ; infatti

$$s^2 - 3s + 2 = (s - 1)(s - 2).$$

Invochiamo ora la (15.6), e otteniamo (si veda anche l'Osservazione 15.3)

$$y(x) = \psi * f(x) = \int_0^x \psi(x - \xi) f(\xi) d\xi, \quad (15.13)$$

se denotiamo con  $\psi$  l'antitrasformata del denominatore di (15.12).

La  $y$  data dalla (15.13) non è altro che la soluzione particolare della e.d.o. in (15.9) ottenuta con il metodo del nucleo risolvete; il nucleo risolvete  $K$  infatti coincide con  $\psi$ . Verifichiamo questo fatto. È noto che  $K$  può essere definito (per e.d.o. a coefficienti costanti) come la soluzione di

$$K'' - 3K' + 2K = 0, \quad x > 0, \quad (15.14)$$

$$K(0) = 0, \quad (15.15)$$

$$K'(0) = 1, \quad (15.16)$$

che può essere ottenuta con il metodo dell'equazione caratteristica (o ancora con la trasformazione di Laplace). Si ottiene

$$K(x) = e^{2x} - e^x. \quad (15.17)$$

Controlliamo che  $\mathcal{L}[K]$  assuma il valore desiderato: per  $s > 2$  si ha

$$\mathcal{L}[K](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} (e^{2x} - e^x) dx = -\frac{1}{2-s} + \frac{1}{1-s} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2},$$

e quindi  $\psi = K$ .



Parte 7

**Complementi**



## Sistemi ortonormali completi ed equazioni differenziali

### 16.1. Operatori definiti da equazioni differenziali

Consideriamo l'operatore

$$\mathcal{L} : L^2((0, \pi)) \rightarrow L^2((0, \pi)), \quad \mathcal{L}(f) = u,$$

ove  $u$  risolve (nel senso precisato sotto) il problema

$$-u'' = f, \quad 0 < x < \pi, \quad (16.1)$$

$$u(0) = 0, \quad (16.2)$$

$$u(\pi) = 0. \quad (16.3)$$

Se  $f \in C([0, \pi])$  si vede in modo semplice che questo problema ha una unica soluzione  $u \in C^2([0, \pi])$  data da

$$u(x) = C_f x - \int_0^x dt \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad 0 < x < \pi, \quad (16.4)$$

ove

$$C_f = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt \int_0^t f(\tau) d\tau \in \mathbf{R}.$$

In particolare, si ha

$$u'(x) = C_f - \int_0^x f(t) dt, \quad 0 < x < \pi. \quad (16.5)$$

La formula (16.4) viene assunta come definizione di  $u$ , e quindi di  $\mathcal{L}(f)$ , anche nel caso generale  $f \in L^2((0, \pi))$ .

NOTAZIONE. Nel seguito denotiamo per semplicità

$$I = (0, \pi).$$

Usiamo anche il simbolo  $f \rightarrow g$  per  $f, g \in L^2(I)$ , per indicare che  $f$  tende a  $g$  nel senso di  $L^2(I)$ , ossia che

$$\|f - g\| \rightarrow 0.$$

□

Per cominciare, dobbiamo dimostrare che la funzione  $u$  definita da (16.4) appartiene davvero a  $L^2(I)$ . In effetti la  $u$  risulta molto più regolare di  $f$ ; su questa proprietà 'regolarizzante' di  $\mathcal{L}$  si basa la teoria che svilupperemo nel seguito.

TEOREMA 16.1. Per ogni fissata  $f \in L^2(I)$ ,  $\mathcal{L}(f)$  appartiene a  $C^1([0, \pi])$  (e quindi in particolare a  $L^2(I)$ ). Inoltre

$$|u'(x)| \leq 2\sqrt{\pi}\|f\|, \quad 0 < x < \pi. \quad (16.6)$$

DIMOSTRAZIONE. A) Dimostriamo che la funzione

$$J(x) = \int_0^x f(t) dt$$

è continua su  $[0, \pi]$ . Per ogni  $x, y \in [0, \pi]$  si ha, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |J(x) - J(y)| &= \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_y^x dt \right|^{\frac{1}{2}} \left| \int_y^x f(t)^2 dt \right|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{|x - y|} \left( \int_I f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\| \sqrt{|x - y|}. \end{aligned} \quad (16.7)$$

Pertanto la  $J$  è in effetti continua.

B) Per la definizione (16.4) la  $u$  risulta essere la somma di un polinomio, e dell'integrale di una funzione continua (per la parte A) di questa dimostrazione). Per i teoremi fondamentali del calcolo, la  $u$  è quindi derivabile e la sua derivata è data dalla (16.5), ed è perciò continua.

C) Applicando ancora la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha per ogni  $f \in L^2(I)$ , e ogni  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} |u'(x)| &\leq |C_f| + \int_0^\pi |f(\tau)| d\tau \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dt \int_0^\pi |f(\tau)| d\tau + \int_0^\pi |f(\tau)| d\tau \\ &= 2 \int_0^\pi |f(\tau)| d\tau \leq 2\sqrt{\pi}\|f\|. \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 16.2. Si noti che il Teorema precedente implica in particolare che la (16.5) vale per ogni  $f \in L^2(I)$ , e non solo per le  $f$  continue, per le quali era stata introdotta.

Inoltre, è facile vedere, usando la (16.4), che

$$f \in C^n([0, \pi]) \quad \implies \quad u \in C^{n+2}([0, \pi]). \quad (16.8)$$

□

OSSERVAZIONE 16.3. In genere (a meno che non valga  $f \in C([0, \pi])$ ), la  $u$  non è di classe  $C^2(I)$  e quindi non risolve la e.d.o. (16.1) nel senso usuale. Invece, essendo in ogni caso  $u$  continua su  $[0, \pi]$ , le condizioni ai limiti (16.2), (16.3), sono assunte nel senso usuale, detto anche *classico* o *puntuale*. □

Diamo di seguito due proprietà fondamentali di  $\mathcal{L}$ .

PROPOSIZIONE 16.4.  $\mathcal{L}$  è un operatore lineare, ossia

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2), \quad (16.9)$$

per ogni  $c_i \in \mathbf{R}$ ,  $f_i \in L^2((0, \pi))$ ,  $i = 1, 2$ .

DIMOSTRAZIONE. Questo segue subito dalla definizione (16.4).  $\square$

DEFINIZIONE 16.5. Un operatore lineare  $\mathcal{T} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  si dice *limitato* se esiste una costante  $C \geq 0$  tale che

$$\|\mathcal{T}(f)\| \leq C\|f\|, \quad \text{per ogni } f \in L^2(I). \quad (16.10)$$

$\square$

L'importanza del concetto di limitatezza per operatori lineari consiste nel seguente

TEOREMA 16.6. *Un operatore limitato  $\mathcal{T} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  è anche continuo (in effetti uniformemente lipschitziano).*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $C$  come in Definizione 16.5. Allora per ogni  $f_1, f_2 \in L^2(I)$ , vale

$$\|\mathcal{T}(f_1) - \mathcal{T}(f_2)\| = \|\mathcal{T}(f_1 - f_2)\| \leq C\|f_1 - f_2\|. \quad (16.11)$$

In particolare

$$\mathcal{T}(f_1) \rightarrow \mathcal{T}(f_2), \quad \text{se } f_1 \rightarrow f_2. \quad (16.12)$$

$\square$

TEOREMA 16.7. *L'operatore  $\mathcal{L}$  definito da  $\mathcal{L}(f) = u$ , con  $u$  data da (16.4), è limitato.*

DIMOSTRAZIONE. Troviamo prima una maggiorazione puntuale per  $u$ : per ogni  $0 < x < \pi$  si ha, usando (16.6),

$$|u(x)| = \left| \int_0^x u'(t) dt \right| \leq \int_0^x |u'(t)| dt \leq 2\sqrt{\pi}\|f\|x. \quad (16.13)$$

Quindi

$$\|\mathcal{L}(f)\|^2 = \int_0^\pi u(x)^2 dx \leq \int_0^\pi 4\pi\|f\|^2 x^2 dx = \frac{4}{3}\pi^4\|f\|^2.$$

Perciò la (16.10) vale, e.g., con  $C = 2\pi^2/\sqrt{3}$ .  $\square$

## 16.2. Altre proprietà di $\mathcal{L}$

Introduciamo alcune proprietà utili dell'operatore  $\mathcal{L}$ . In particolare dimostriamo che  $\mathcal{L}$  è simmetrico e positivo, ove si definisca:

DEFINIZIONE 16.8. Un operatore lineare  $\mathcal{T} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  si dice *simmetrico* (o *autoaggiunto*) se vale

$$(\mathcal{T}(f_1), f_2) = (f_1, \mathcal{T}(f_2)), \quad \text{per ogni } f_1, f_2 \in L^2(I). \quad (16.14)$$

$\square$

DEFINIZIONE 16.9. Un operatore lineare  $\mathcal{T} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  si dice *positivo* se vale

$$(\mathcal{T}(f), f) > 0, \quad \text{per ogni } f \in L^2(I), f \neq 0. \quad (16.15)$$

$\square$

TEOREMA 16.10. Per ogni scelta di  $f_1, f_2 \in L^2(I)$  vale

$$(\mathcal{L}(f_1), f_2) = (f_1, \mathcal{L}(f_2)) = \int_I u_1'(x)u_2'(x) dx, \quad (16.16)$$

ove si è posto  $u_i = \mathcal{L}(f_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

DIMOSTRAZIONE. Si ha, usando le condizioni ai limiti (16.2), (16.3) per  $u_1$ , e (16.5) per  $u_2$ ,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(f_1), f_2) &= \int_0^\pi u_1(x)f_2(x) dx \\ &= \left[ u_1(x) \int_0^x f_2(t) dt \right]_\pi^0 - \int_0^\pi u_1'(x) \int_0^x f_2(t) dt dx \\ &= \int_0^\pi u_1'(x) \{u_2'(x) - C_{f_2}\} dx = \int_0^\pi u_1'(x)u_2'(x) dx. \end{aligned}$$

Dato che l'ultimo termine è simmetrico in  $u_1, u_2$ , cioè in  $f_1, f_2$ , si è dimostrata la tesi.  $\square$

COROLLARIO 16.11. Per ogni  $f \in L^2(I)$ ,  $f \neq 0$  si ha, ponendo  $u = \mathcal{L}(f)$ ,

$$(\mathcal{L}(f), f) = \int_I u'(x)^2 dx > 0. \quad (16.17)$$

DIMOSTRAZIONE. L'uguaglianza in (16.17) segue subito da (16.16). Vogliamo ora dimostrare che vale in effetti la disuguaglianza stretta, se  $f \neq 0$ . Assumiamo per assurdo che

$$\int_I u'(x)^2 dx = 0.$$

Visto che  $u \in C^1(I)$ , segue che  $u' = 0$ , ossia che

$$\int_0^x f(t) dt = C_f, \quad \text{per ogni } 0 < x < \pi.$$

Se  $f \in C([0, \pi])$  segue derivando in  $x$  che  $f(x) = 0$  per ogni  $x \in I$ . Il caso generale segue in modo simile, ma richiede qualche conoscenza ulteriore di teoria dell'integrazione di Lebesgue, e lo tralasciamo.  $\square$

Le definizioni 16.8 e 16.9 vanno confrontate con le analoghe definizioni di matrici simmetriche e positive. Sempre in analogia con il caso delle matrici, si pone la

DEFINIZIONE 16.12. Un numero reale  $\mu$  si dice un autovalore di  $\mathcal{T} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  se esiste un  $f \in L^2(I)$ ,  $f \neq 0$  tale che

$$\mathcal{T}(f) = \mu f. \quad (16.18)$$

$\square$

### 16.3. Autovalori di $\mathcal{L}$ e proprietà di massimo

Nel seguito restringiamo il dominio (e il codominio) di  $\mathcal{L}$  a sottospazi vettoriali di  $L^2(I)$ , ossia considereremo sottospazi  $V \subset L^2(I)$  tali che

$$\mathcal{L}(V) \subset V. \quad (16.19)$$

Introduciamo anche la funzione di Rayleigh

$$R(\varphi) = \frac{(\mathcal{L}(\varphi), \varphi)}{(\varphi, \varphi)} = \frac{(\mathcal{L}(\varphi), \varphi)}{\|\varphi\|^2} > 0, \quad \varphi \in L^2(I), \varphi \neq 0.$$

Vale il seguente notevole

**TEOREMA 16.13.** *Sia  $V$  un sottospazio di  $L^2(I)$  tale che valga (16.19). Sia  $f \in V$ ,  $f \neq 0$ , tale che*

$$R(f) = \max_{\varphi \in (V \setminus \{0\})} R(\varphi) =: \mu. \quad (16.20)$$

Allora

$$\mathcal{L}(f) = \mu f. \quad (16.21)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\varphi \in V$  fissata ad arbitrio. Sotto le ipotesi dell'enunciato, la funzione

$$r(s) = \frac{(\mathcal{L}(f + s\varphi), f + s\varphi)}{\|f + s\varphi\|^2}, \quad -s_0 < s < s_0,$$

ha un massimo in  $s = 0$ ; si noti infatti che  $f + s\varphi \in V$ . Qui  $s_0$  è scelto così piccolo che per  $-s_0 < s < s_0$

$$\|f + s\varphi\| \geq \|f\| - |s|\|\varphi\| > 0, \quad \text{ossia } f + s\varphi \neq 0.$$

Perciò deve essere  $r'(0) = 0$ . Indichiamo con  $J_N(s)$  [rispettivamente  $J_D(s)$ ] il numeratore [rispettivamente il denominatore] di  $r(s)$ , cioè, usando la simmetria di  $\mathcal{L}$ ,

$$\begin{aligned} J_N(s) &= (\mathcal{L}(f), f) + 2s(\mathcal{L}(f), \varphi) + s^2(\mathcal{L}(\varphi), \varphi), \\ J_D(s) &= (f, f) + 2s(f, \varphi) + s^2(\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Un calcolo diretto dà

$$r'(s) = \frac{2J_D(s)\{(\mathcal{L}(f), \varphi) + s(\mathcal{L}(\varphi), \varphi)\} - 2J_N(s)\{(f, \varphi) + s(\varphi, \varphi)\}}{J_D(s)^2},$$

da cui

$$0 = r'(0) = 2\frac{(\mathcal{L}(f), \varphi)}{(f, f)} - 2\frac{(\mathcal{L}(f), f)}{(f, f)^2}(f, \varphi).$$

Da qui discende, per definizione di  $f$  e di  $\mu$ ,

$$(\mathcal{L}(f), \varphi) = \mu(f, \varphi), \quad (16.22)$$

per ogni  $\varphi \in V$ . Prendendo

$$\varphi = \mathcal{L}(f) - \mu f \in V$$

(si noti che  $\varphi \in V$  perché per ipotesi  $\mathcal{L}(V) \subset V$ ) si ottiene dalla (16.22)

$$\|\mathcal{L}(f) - \mu f\|^2 = (\mathcal{L}(f) - \mu f, \mathcal{L}(f) - \mu f) = 0,$$

da cui la (16.21). □

### 16.3.1. Costruzione di una successione di autovalori.

NOTAZIONE. Nel seguito usiamo le notazioni

$$\langle f_1, \dots, f_n \rangle = \{f \in L^2(I) \mid f = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n, c_i \in \mathbf{R}\}$$

(ossia  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$  è il sottospazio vettoriale generato da  $f_1, \dots, f_n$ ), e

$$U^\perp = \{f \in L^2(I) \mid (f, g) = 0 \text{ per ogni } g \in U\},$$

ove  $U$  è un sottospazio vettoriale di  $L^2(I)$ . Si vede subito che anche  $U^\perp$  è un sottospazio vettoriale, detto *ortogonale* di  $U$ .  $\square$

Si costruisce una successione (non crescente) di autovalori positivi di  $\mathcal{L}$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots, \quad (16.23)$$

seguendo il seguente procedimento:

- PASSO 1: Definiamo

$$V_1 = L^2(I) = 0^\perp, \quad \mu_1 = \max_{\varphi \in (V_1 \setminus \{0\})} R(\varphi) > 0,$$

ove per ora assumiamo che tale massimo esista, e applichiamo quindi il Teorema 16.13.

- PASSO D'ITERAZIONE: Sia  $n \geq 1$  e supponiamo di aver già trovato gli autovalori  $\mu_i, i = 1, 2, \dots, n$ , come in (16.23), ciascuno corrispondente all'autovettore  $f_i \neq 0$ . Definiamo allora il sottospazio

$$V_{n+1} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle^\perp \subset L^2(I),$$

e definiamo anche

$$\mu_{n+1} = \max_{\varphi \in (V_{n+1} \setminus \{0\})} R(\varphi) > 0,$$

assumendo ancora che tale massimo esista. Il Lemma 16.15 e il Corollario 16.11 implicano la stretta positività di  $\mu_{n+1}$ . Si noti che possiamo applicare il Teorema 16.13 in quanto  $\mathcal{L}(V_{n+1}) \subset V_{n+1}$ : vedi Lemma 16.16. Notiamo infine che

$$\mu_{n+1} \leq \mu_n.$$

Infatti per costruzione  $V_{n+1} \subset V_n$ , cosicché

$$\mu_{n+1} = \max_{\varphi \in (V_{n+1} \setminus \{0\})} R(\varphi) \leq \mu_n = \max_{\varphi \in (V_n \setminus \{0\})} R(\varphi).$$

OSSERVAZIONE 16.14. Ciascun  $f_i$  tra quelli costruiti sopra è ortogonale a tutti gli altri, ossia

$$(f_i, f_j) = 0, \quad \text{se } i \neq j, \quad (16.24)$$

per costruzione.  $\square$

Resta quindi solo da dimostrare che esiste il punto di massimo di  $R$  su ciascun  $V_n$ . Questo verrà fatto nella Sezione 16.5.

LEMMA 16.15.

$$V_{n+1} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Posto  $\varphi_i = f_i/\|f_i\|$ , si ha che  $\{\varphi_i\}$  è un sistema ortonormale. Sia  $g \in L^2(I)$  scelta ad arbitrio; definiamo

$$h = g - \sum_{i=1}^n (g, f_i) \frac{f_i}{\|f_i\|^2}.$$

Se fosse  $V_{n+1} = 0$ , visto che  $h \in V_{n+1}$ , come si verifica subito, seguirebbe  $h = 0$ , ossia

$$g = \sum_{i=1}^n (g, f_i) \frac{f_i}{\|f_i\|^2}.$$

Dunque gli elementi  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  costituirebbero una base vettoriale di  $L^2(I)$ , mentre si sa che  $L^2(I)$  ha dimensione infinita come spazio vettoriale (vedi il Corollario 7.11 del Capitolo 7).  $\square$

LEMMA 16.16.

$$\mathcal{L}(V_{n+1}) \subset V_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti  $h \in V_{n+1}$  se e solo se

$$(h, g) = 0, \quad \text{per ogni } g \in \langle f_1, \dots, f_n \rangle.$$

Per definizione di  $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$  questo equivale a

$$(h, f_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (16.25)$$

Dunque se  $h$  soddisfa (16.25), per ogni  $i = 1, \dots, n$  si ha

$$(\mathcal{L}(h), f_i) = (h, \mathcal{L}(f_i)) = (h, \mu_i f_i) = \mu_i (h, f_i) = 0,$$

ossia anche  $\mathcal{L}(h)$  soddisfa (16.25) e perciò  $\mathcal{L}(h) \in V_{n+1}$ ; si è usata la simmetria di  $\mathcal{L}$ .  $\square$

#### 16.4. Autovalori di $\mathcal{L}$ e del problema ai limiti

Se vale

$$u = \mathcal{L}(f) = \mu f,$$

segue che  $f \in C^1([0, \pi])$  (per il Teorema 16.1), e quindi  $u$  è una soluzione di classe  $C^3([0, \pi])$  di

$$-u'' = \lambda u, \quad 0 < x < \pi, \quad (16.26)$$

$$u(0) = 0, \quad (16.27)$$

$$u(\pi) = 0, \quad (16.28)$$

con  $u \neq 0$  e

$$\lambda = \frac{1}{\mu} > 0.$$

La  $u$  si dice allora un autovettore (o *autofunzione*) di (16.26)–(16.28), e  $\lambda$  un autovalore dello stesso problema. Si noti che è sempre possibile assumere

$$\|u\| = 1, \quad (16.29)$$

moltiplicando  $u$  per uno scalare non nullo opportuno, il che non altera (16.26)–(16.28).

Nella Sezione 16.3 si è dunque dato un modo di costruire una successione non decrescente

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots,$$

di autovalori corrispondenti a una successione ortonormale  $\{u_n\}$  di autofunzioni (fatto salvo che dobbiamo ancora dimostrare l'effettiva esistenza dei valori di massimo  $\mu_n$  della funzione di Rayleigh).

Per l'Osservazione 16.2, ciascuna  $u_n$  è in realtà in  $C^\infty([0, \pi])$ ; infatti si è già visto che  $u_n \in C^3([0, \pi])$ . Ma allora dall'Osservazione 16.2 segue  $u_n \in C^5([0, \pi])$ , e quindi segue  $u_n \in C^7([0, \pi])$ ,  $\dots$ .

**16.4.1. Calcolo diretto di autofunzioni del problema ai limiti.** D'altra parte, procedendo alla ricerca diretta delle soluzioni non nulle di (16.26)–(16.28), ossia integrando la e.d.o., si ottengono le autofunzioni

$$v_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(mx), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (16.30)$$

corrispondenti agli autovalori

$$\ell_m = m^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.31)$$

È bene chiarire la relazione logica che, a questo punto dello sviluppo della teoria, corre tra le successioni  $\{u_n\}$  e  $\{v_m\}$ :

P.1 La successione  $\{v_m\}$  comprende certamente tutte le autofunzioni del problema ai limiti (16.26)–(16.28), perché il calcolo diretto implica che non ne esistono altre.

P.2 Quindi la successione  $\{u_n\}$  deve essere una sottosuccessione della  $\{v_m\}$ ; in particolare la successione degli autovalori  $\{\lambda_n\}$  deve essere una sottosuccessione della  $\{\ell_m\}$ ; in formula

$$\{u_n\} \subset \{v_m\}; \quad \{\lambda_n\} \subset \{\ell_m\}. \quad (16.32)$$

Dal fatto che le funzioni  $\{u_n\}$  sono tutte diverse tra di loro, e dalla stretta monotonia della successione  $\{\ell_m\}$  segue subito che anche la successione  $\{\lambda_n\}$  è strettamente crescente. Diamo comunque una dimostrazione più dettagliata di questo fatto: se valesse (come in generale può accadere)

$$\lambda_i = \lambda_j, \quad i \neq j,$$

si dovrebbero avere nel nostro caso due autofunzioni  $u_i = v_{m_i}$  e  $u_j = v_{m_j}$  corrispondenti ad autovalori uguali

$$\ell_{m_i} = \lambda_i = \lambda_j = \ell_{m_j}.$$

Dato che la successione  $\{\ell_m\}$  è strettamente crescente, ne segue  $m_i = m_j$ , ossia

$$u_i = v_{m_i} = v_{m_j} = u_j,$$

il che è però assurdo perché  $u_i \perp u_j$  per costruzione della successione  $\{u_n\}$ . Quindi la successione  $\{\lambda_n\}$  deve essere strettamente crescente anch'essa, ossia la  $\{\mu_n\}$  deve essere strettamente decrescente.

Dal punto 16.P.2 segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty, \quad \text{ossia} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0, \quad (16.33)$$

che risulterà di importanza fondamentale nella dimostrazione del seguente risultato.

TEOREMA 16.17. *Il sistema di autofunzioni  $\{u_n\}$  costruito sopra è un sistema ortonormale completo in  $L^2(I)$ . In particolare quindi per ogni  $n \geq 1$ ,*

$$u_n(x) = v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad 0 < x < \pi. \quad (16.34)$$

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo, dal Corollario 7.21 del Capitolo 7, che per dimostrare la completezza del sistema  $\{u_n\}$  basta far vedere che:

$$(u_n, u) = 0, \quad \text{per ogni } n \geq 1 \quad (16.35)$$

implica

$$u = 0.$$

Ricordiamo che  $u_n = \mu_n f_n$ . Dunque se vale la (16.35) la  $u$  risulta ortogonale a tutte le  $u_n$  e perciò a tutte le  $f_n$ . Dunque vale

$$u \in V_n, \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

In particolare, se per assurdo  $u \neq 0$ , ricordando la definizione dei sottospazi  $V_n$  data nella Sottosezione 16.3.1,

$$R(u) = \frac{(\mathcal{L}(u), u)}{\|u\|^2} \leq \max_{\varphi \in (V_n \setminus \{0\})} R(\varphi) = \mu_n \rightarrow 0,$$

per  $n \rightarrow \infty$ , se teniamo presente anche la (16.33). Perciò

$$(\mathcal{L}(u), u) = 0,$$

il che implica proprio  $u = 0$ , per il Corollario 16.11, contro l'ipotesi di assurdo.  $\square$

### 16.5. Esistenza dei punti di massimo per $\mathcal{L}$ . L'idea di Ascoli e Arzelà

Dimostriamo qui che in effetti esistono le funzioni  $f_n \in V_n$  tali che

$$\mu_n = R(f_n) = \max_{\varphi \in (V_n \setminus \{0\})} R(\varphi) > 0, \quad n \geq 1.$$

Più in generale consideriamo, per ora, un qualunque sottospazio vettoriale  $V \neq 0$  di  $L^2(I)$ , e cerchiamo di dimostrare che esiste  $f \in V$  tale che

$$R(f) = \max_{\varphi \in (V \setminus \{0\})} R(\varphi). \quad (16.36)$$

Prima di tutto, osserviamo che la funzione di Rayleigh assume valori limitati su tutto  $L^2(I)$ . Infatti, per ogni  $\varphi \neq 0$ ,

$$R(\varphi) = \frac{(\mathcal{L}(\varphi), \varphi)}{\|\varphi\|^2} \leq \frac{C\|\varphi\| \cdot \|\varphi\|}{\|\varphi\|^2} \leq C < \infty, \quad (16.37)$$

ove  $C$  è una costante come nel Teorema 16.7.

Pertanto esiste finito per ogni  $V$  come sopra il

$$\sup_{V \setminus \{0\}} R \leq \sup_{L^2(I) \setminus \{0\}} R < \infty.$$

Quindi esiste una successione  $\{f_i\} \subset V$  tale che

$$R(f_i) \rightarrow \sup_{V \setminus \{0\}} R, \quad i \rightarrow \infty.$$

Si può sempre assumere che

$$\|f_i\| = 1, \quad \text{per ogni } i, \quad (16.38)$$

poiché, per la definizione di  $R$ ,

$$R\left(\frac{f_i}{\|f_i\|}\right) = R(f_i).$$

Consideriamo poi la successione  $\{u_i\} \subset C^1([0, \pi])$  definita da

$$u_i = \mathcal{L}(f_i).$$

PROPOSIZIONE 16.18. *La successione  $\{u_i\}$  ammette una sottosuccessione*

$$\{u_{i^*(j)}\}$$

*tale che le sue derivate convergono a una funzione  $v \in C([0, \pi])$ , ossia tale che*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u'_{i^*(j)}(x) = v(x), \quad x \in [0, \pi]. \quad (16.39)$$

DIMOSTRAZIONE. A) Consideriamo un insieme di reali

$$A = \{q_m\}_{m=1}^{\infty} \subset [0, \pi],$$

numerabile e denso in  $[0, \pi]$ . Per esempio

$$\mathbb{Q} \cap [0, \pi],$$

oppure gli estremi degli intervalli ottenuti per bisezioni successive di  $[0, \pi]$ , ossia i punti che si possono scrivere come

$$\frac{k}{2^h} \pi, \quad k = 0, \dots, 2^h, \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

La proprietà necessaria, oltre alla numerabilità, è appunto la densità, cioè il fatto che per ogni  $x \in [0, \pi]$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  prefissati, esista un  $q_m \in A$  tale che

$$|x - q_m| < \varepsilon. \quad (16.40)$$

B) Consideriamo la successione delle derivate  $u'_i$ , che denotiamo  $v_i = u'_i$  per semplicità di notazione.

Iniziamo con il trovare una sottosuccessione di  $\{v_i\}$  che converge su  $A$ . La successione numerica

$$v_i(q_1)$$

è limitata, perché per ogni  $i$  e per ogni  $x \in [0, \pi]$  si ha per le (16.6) e (16.38)

$$|v_i(x)| \leq 2\sqrt{\pi}\|f_i\| \leq 2\sqrt{\pi}. \quad (16.41)$$

Si può quindi trovare una sottosuccessione  $\{v_{i_1(j)}\}$  tale che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_{i_1(j)}(q_1) \quad \text{esiste.}$$

Consideriamo ora la successione

$$v_{i_1(j)}(q_2).$$

Anch'essa è limitata, e dunque se ne può estrarre una sottosuccessione  $\{v_{i_2(j)}\}$  tale che anche

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_{i_2(j)}(q_2) \quad \text{esiste.}$$

Si noti che il limite di  $\{v_{i_2(j)}\}$  su  $q_1$  esiste ancora, perché  $\{i_2\} \subset \{i_1\}$ .

Si procede nello stesso modo per i  $q_m$  successivi, costruendo una successione di successioni  $\{i_m\}$ ,  $m \geq 1$ . Ciascuna  $\{i_m\}$  è estratta dalla precedente e converge su  $q_1, \dots, q_m$ . Consideriamo ora la successione *diagonale*

$$i^*(j) = i_j(j).$$

Dato che per ogni  $m \geq 1$ ,

$$i^*(j) \in \{i_m(h)\}_{h=1}^{\infty}, \quad \text{per } j \geq m,$$

le successioni numeriche  $\{v_{i^*(j)}(q_m)\}$  convergono per ogni  $m \geq 1$ . Quindi  $\{v_{i^*(j)}\}$  converge sull'insieme  $A$ , come richiesto.

Per questa parte della dimostrazione abbiamo usato solo la uniforme limitatezza delle  $v_i$ , ossia la (16.41).

C) Dimostreremo ora che la  $\{v_{i^*(j)}\}$  converge su tutto  $[0, \pi]$ . Scegliamo un  $x \in [0, \pi]$  qualunque. Si tratta di far vedere che la successione  $v_{i^*(j)}(x)$  è di Cauchy in  $\mathbf{R}$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ , e maggioriamo per  $h \geq j \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |v_{i^*(h)}(x) - v_{i^*(j)}(x)| &\leq |v_{i^*(h)}(x) - v_{i^*(h)}(q_m)| + |v_{i^*(h)}(q_m) - v_{i^*(j)}(q_m)| \\ &\quad + |v_{i^*(j)}(q_m) - v_{i^*(j)}(x)| =: J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (16.42)$$

Qui  $m$  è stato fissato in modo che valga la (16.40), per il valore  $\varepsilon$  ora scelto. Il termine  $J_2$  può essere reso inferiore a  $\varepsilon$  usando il fatto noto che la successione  $\{v_{i^*(j)}\}$  converge su  $A$ , e quindi su  $q_m$ :

$$J_2 = |v_{i^*(h)}(q_m) - v_{i^*(j)}(q_m)| \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } h \geq j \geq j_\varepsilon, \quad (16.43)$$

per  $j_\varepsilon \geq 1$  opportuno.

I termini  $J_1$  e  $J_3$  si maggiorano usando in ultima analisi la proprietà di regolarizzazione di  $\mathcal{L}$ , ossia il Teorema 16.1, ed in particolare la (16.7), che implica subito

$$|v_i(x) - v_i(y)| \leq \sqrt{|x - y|}, \quad \text{per ogni } i \geq 1 \text{ e ogni } 0 \leq x \leq \pi. \quad (16.44)$$

Si ha dunque per  $J_1$ , per ogni  $h$ ,

$$J_1 = |v_{i^*(h)}(x) - v_{i^*(h)}(q_m)| \leq \sqrt{|x - q_m|} \leq \sqrt{\varepsilon}. \quad (16.45)$$

Nello stesso modo si maggiora  $J_3$ .

Da (16.42)–(16.45) segue quindi

$$|v_{i^*(h)}(x) - v_{i^*(j)}(x)| \leq \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}, \quad \text{per ogni } h \geq j \geq j_\varepsilon. \quad (16.46)$$

La successione  $\{v_{i^*(j)}(x)\}$  risulta perciò di Cauchy, e quindi converge a un numero reale.

Abbiamo dimostrato che il limite

$$v(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} v_{i^*(j)}(x) \quad (16.47)$$

esiste per ogni  $x \in [0, \pi]$ .

D) La funzione  $v$  definita dalla (16.47) è uniformemente continua su  $[0, \pi]$  perché

$$|v(x) - v(y)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |v_{i^*(j)}(x) - v_{i^*(j)}(y)| \leq \sqrt{|x - y|}, \quad (16.48)$$

per ogni  $x, y \in [0, \pi]$ .  $\square$

PROPOSIZIONE 16.19. *La convergenza della sottosuccessione  $\{u'_{i^*(j)}\}$  è in realtà uniforme su  $[0, \pi]$ , cioè*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} |u'_{i^*(j)}(x) - v(x)| = 0. \quad (16.49)$$

DIMOSTRAZIONE. La (16.49) può essere dimostrata con il seguente raffinamento dell'argomento svolto nel punto C) della dimostrazione della Proposizione 16.18.

Fissiamo  $\varepsilon$ , e un sottoinsieme, *finito*,

$$A_\varepsilon \subset A,$$

con la proprietà: per ogni  $\xi \in [0, \pi]$  esiste un  $q_n \in A_\varepsilon$  tale che valga

$$|\xi - q_n| \leq \varepsilon;$$

un insieme come  $A_\varepsilon$  si chiama anche una  $\varepsilon$ -rete. Riproduciamo ora il ragionamento nel punto C) sopra, con la importante differenza che  $x$  non è fissato: vogliamo trovare una maggiorazione valida per tutti gli  $x \in [0, \pi]$ .

Riscriviamo comunque la (16.42), ove  $q_m$  è scelto però nel sottoinsieme  $A_\varepsilon$ ; la definizione di  $A_\varepsilon$  garantisce che un  $q_m$  come questo esiste (in dipendenza dal valore assunto da  $x$ ).

La maggiorazione in (16.43) segue ora come sopra, ma il valore  $j_\varepsilon$  è scelto in modo che

$$|v_{i^*(j)}(q_n) - v_{i^*(h)}(q_n)| \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } h \geq j \geq j_\varepsilon,$$

per ogni  $q_n \in A_\varepsilon$ . Questo è possibile perché  $A_\varepsilon$  è finito, e quindi in sostanza basta scegliere il più grande dei  $j_\varepsilon$  che vanno bene per ciascun  $q_n \in A_\varepsilon$ .

Si noti che il  $j_\varepsilon$  scelto ora non dipende dal punto  $x$  che appare nella (16.43), mentre quello scelto in C) in linea di principio ne dipendeva, attraverso il particolare punto  $q_m$  scelto in modo che valesse la (16.40).

La (16.45) segue come sopra.

Dunque la (16.46) è sostituita dalla

$$|v_{i^*(h)}(x) - v_{i^*(j)}(x)| \leq \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}, \quad \text{per ogni } h \geq j \geq j_\varepsilon, \quad (16.50)$$

che è formalmente identica, ma contiene l'importante differenza dell'indipendenza di  $j_\varepsilon$  da  $x$ .

Mandiamo ora  $h \rightarrow \infty$  in (16.50), e otteniamo

$$|v(x) - v_{i^*(j)}(x)| \leq \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}, \quad \text{per ogni } j \geq j_\varepsilon. \quad (16.51)$$

Usando l'indipendenza di  $j_\varepsilon$  da  $x$ , possiamo prendere il massimo su  $[0, \pi]$  e ottenere

$$\max_{x \in [0, \pi]} |v(x) - v_{i^*(j)}(x)| \leq \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}, \quad \text{per ogni } j \geq j_\varepsilon,$$

che equivale alla (16.49). □

COROLLARIO 16.20. *La successione  $\{u_i\}$  ammette una sottosuccessione*

$$\{u_{i^*(j)}\}$$

che converge uniformemente su  $[0, \pi]$  a una funzione  $u \in C^1([0, \pi])$ , insieme con le sue derivate, ossia tale che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} |u'_{i^*(j)}(x) - u'(x)| = 0, \quad (16.52)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{x \in [0, \pi]} |u_{i^*(j)}(x) - u(x)| = 0. \quad (16.53)$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo

$$u(x) = \int_0^x v(t) dt, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

dove  $v$  è il limite uniforme di  $\{u'_{i^*(j)}\}$ . Quindi  $u$  è una funzione  $C^1([0, \pi])$ .

La (16.52) si riduce alla (16.49).

Inoltre per ogni  $x \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} |u_{i^*(j)}(x) - u(x)| &= \left| \int_0^x [v_{i^*(j)}(t) - v(t)] dt \right| \\ &\leq \int_0^x \max_{t \in [0, \pi]} |v_{i^*(j)}(t) - v(t)| dt = \pi \max_{t \in [0, \pi]} |v_{i^*(j)}(t) - v(t)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

per  $j \rightarrow \infty$ , ossia la (16.53).  $\square$

TEOREMA 16.21. *Esiste una  $f \in V$  tale che*

$$\max_{V \setminus \{0\}} R = \mathcal{L}(f). \quad (16.54)$$

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità di notazione usiamo qui i simboli  $f_i, u_i$  per denotare le sottosuccessioni  $f_{i^*(j)}, u_{i^*(j)}$ .

A) Calcoliamo, usando il Corollario 16.11,

$$(\mathcal{L}(f_i), f_i) = \int_0^\pi u'_i(x)^2 dx. \quad (16.55)$$

D'altra parte, le  $u'_i$  convergono uniformemente in  $I$ , e quindi in  $L^2(I)$  (questo è di verifica immediata e comunque è provato nella dimostrazione del Teorema 7.24). Denotiamo con  $u$  il limite delle  $u_i$ . Allora, per il Corollario 7.7 segue che

$$\sup_{V \setminus \{0\}} R = \lim_{i \rightarrow \infty} (\mathcal{L}(f_i), f_i) = \int_0^\pi u'(x)^2 dx. \quad (16.56)$$

A questo punto resta solo da dimostrare che esiste una  $f \in V$  tale che

$$u = \mathcal{L}(f), \quad (16.57)$$

e, ancora per il Corollario 7.7, avremo dimostrato la (16.54).

B) Dato che tutte le funzioni della successione  $\{f_i\}$  hanno norma limitata (da 1), è possibile estrarne una sottosuccessione convergente nel senso debole di  $L^2(I)$  (vedi la Sottosezione A.3.1). Denotiamo ancora con  $f_i$  questa

sottosuccessione, e con  $f$  il suo limite debole. Si ha infine, per definizione di convergenza debole, e di  $\mathcal{L}$  (vedi la (16.4)),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(x) &= C_f x - \int_0^x dt \int_0^t f(\tau) d\tau \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \left\{ C_{f_i} x - \int_0^x dt \int_0^t f_i(\tau) d\tau \right\} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f_i)(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x) = u(x),\end{aligned}$$

per  $x \in I$ . □

### 16.5.1. Il teorema generale di Ascoli–Arzelà.

DEFINIZIONE 16.22. Una funzione continua  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  si dice un modulo di continuità se

$$\omega(s) > 0, \quad s > 0; \quad \omega(0) = 0. \quad (16.58)$$

□

TEOREMA 16.23. Sia  $\{v_i\}$  una successione di funzioni continue su un compatto  $K \subset \mathbf{R}^N$ . Assumiamo anche che esistano: una costante  $C$  tale che

$$|v_i(x)| \leq C, \quad (16.59)$$

e un modulo di continuità  $\omega$  tale che

$$|v_i(x) - v_i(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad (16.60)$$

per ogni  $i$  e per ogni  $x, y \in K$ . Allora esiste una sottosuccessione di  $\{v_i\}$  che converge uniformemente su  $K$  a una funzione  $v \in C(K)$ .

La dimostrazione ricalca quella della Proposizione 16.18, dove in particolare si aveva

$$\omega(s) = \sqrt{s}.$$

## Classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine

### 17.1. Equazioni a coefficienti costanti in due variabili

Consideriamo l'equazione

$$\mathcal{L}_0 u := Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (17.1)$$

posta in un aperto  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ . Qui  $f \in C(\Omega \times \mathbf{R}^3)$ ,  $u \in C^2(\Omega)$ , e  $A, B, C$  sono costanti reali. Per rimanere nel campo delle equazioni lineari, assumiamo che la dipendenza di  $f$  da  $u$  e dal suo gradiente sia lineare, ma in realtà i valori di  $f$  sono irrilevanti ai fini della classificazione dell'equazione (17.1), che è invece basata solo sui coefficienti  $A, B, C$  della *parte principale*  $\mathcal{L}_0$ . Assumiamo che l'equazione non sia degenere, ossia che almeno uno tra  $A, B$  e  $C$  sia diverso da 0.

Un possibile punto di partenza per classificare le equazioni (17.1) è considerare la possibilità di ridurle a una forma più semplice, per esempio attraverso un'opportuna trasformazione delle variabili  $(x, y)$ . Introduciamo le nuove variabili

$$\xi = \alpha_1 x + \beta_1 y, \quad \eta = \alpha_2 x + \beta_2 y,$$

con  $\alpha_i, \beta_i$  costanti reali tali che

$$\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 \neq 0. \quad (17.2)$$

Introduciamo la nuova incognita  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ , che dunque soddisfa

$$u(x, y) = v(\alpha_1 x + \beta_1 y, \alpha_2 x + \beta_2 y).$$

La regola di derivazione di funzioni composte dà

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \alpha_1^2 v_{\xi\xi} + 2\alpha_1 \alpha_2 v_{\xi\eta} + \alpha_2^2 v_{\eta\eta}, & u_{yy} &= \beta_1^2 v_{\xi\xi} + 2\beta_1 \beta_2 v_{\xi\eta} + \beta_2^2 v_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= \alpha_1 \beta_1 v_{\xi\xi} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) v_{\xi\eta} + \alpha_2 \beta_2 v_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 u &= (A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1\beta_1 + C\beta_1^2)v_{\xi\xi} + \\ & 2(A\alpha_1\alpha_2 + B(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + C\beta_1\beta_2)v_{\xi\eta} + \\ & (A\alpha_2^2 + 2B\alpha_2\beta_2 + C\beta_2^2)v_{\eta\eta}. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Vogliamo ridurre la parte principale a  $v_{\xi\eta}$  (a meno di coefficienti costanti), vogliamo cioè annullare i coefficienti di  $v_{\xi\xi}$  e  $v_{\eta\eta}$ . Allora dobbiamo imporre

$$\begin{aligned} A\alpha_1^2 + 2B\alpha_1\beta_1 + C\beta_1^2 &= 0, \\ A\alpha_2^2 + 2B\alpha_2\beta_2 + C\beta_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Almeno uno tra  $A$  e  $C$  si può assumere non nullo, altrimenti l'equazione (17.1) è già nella forma desiderata. Senza perdita di generalità assumiamo  $A \neq 0$ .

Allora deve essere, per la (17.2) e per le (17.4),  $\beta_1, \beta_2 \neq 0$ . Quindi, posto  $\omega = \alpha_i/\beta_i$ ,  $i = 1, 2$ , si deve avere

$$A\omega^2 + 2B\omega + C = 0, \quad (17.5)$$

che ha le radici

$$\omega_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad \omega_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Le due radici potrebbero essere complesse. Dunque si ha

$$\alpha_1 = \omega_i \beta_1, \quad \alpha_2 = \omega_j \beta_2, \quad \text{per } i, j \in \{1, 2\}. \quad (17.6)$$

Poiché dobbiamo rispettare la condizione (17.2), i due  $\omega_i$  devono essere diversi in (17.6). Inoltre devono essere reali, se vogliamo rimanere nel campo delle trasformazioni reali di coordinate. Questo conduce a richiedere

$$B^2 - AC > 0. \quad (17.7)$$

In questo caso la trasformazione di coordinate (ottenuta come sopra per  $\beta_i = 1$ )

$$\xi = \omega_1 x + y, \quad \eta = \omega_2 x + y \quad (17.8)$$

dà

$$\mathcal{L}_0 u = 2(A\omega_1\omega_2 + B(\omega_1 + \omega_2) + C)v_{\xi\eta} = \frac{4}{A}(AC - B^2)v_{\xi\eta},$$

che è la forma voluta. Si noti che il coefficiente di  $v_{\xi\eta}$  è diverso da zero, per (17.7). Nel caso in cui valga quest'ultima l'equazione (17.1) si dice *iperbolica*, e  $v_{\xi\eta}$  è la forma canonica della sua parte principale (a meno di coefficienti diversi da zero).

Le rette  $\xi = \text{costante}$ ,  $\eta = \text{costante}$  si dicono *caratteristiche* dell'equazione iperbolica.

ESEMPIO 17.1. L'equazione delle onde

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c > 0,$$

in cui  $A = -c^2$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ , soddisfa  $B^2 - AC = c^2$ , e dunque la (17.7). La trasformazione di coordinate (17.8) (o meglio, una sua equivalente) è stata usata nel Teorema 10.1.

L'equazione delle onde è spesso considerata il prototipo delle equazioni iperboliche.  $\square$

Supponiamo che (17.7) non sia soddisfatta e che invece valga

$$B^2 - AC = 0. \quad (17.9)$$

In questo caso l'equazione (17.1) si dice *parabolica*. Supponiamo per ora che  $B \neq 0$ , cosicché anche  $A$  e  $C$  sono non nulli. Allora l'unica soluzione di (17.5) è  $\omega = -B/A$ . Consideriamo allora, per questa scelta di  $\omega$ , il cambiamento di coordinate

$$\xi = x, \quad \eta = \omega x + y. \quad (17.10)$$

Il coefficiente di  $v_{\eta\eta}$  si annulla, e quello di  $v_{\xi\eta}$  anche, perché uguaglia

$$2(A\omega + B) = 0.$$

Dunque la parte principale si riduce a  $v_{\xi\xi}$  (a meno di coefficienti diversi da zero), che ne è la forma canonica per le equazioni paraboliche.

Le rette  $\eta = \text{costante}$  si dicono *caratteristiche* dell'equazione parabolica: le equazioni paraboliche hanno una sola famiglia di caratteristiche, mentre le equazioni iperboliche ne hanno due.

Se poi  $B = 0$ , allora uno tra  $A$  e  $C$  si annulla, per (17.9), e quindi la parte principale è già nella forma  $u_{xx}$  (o  $u_{yy}$ ).

ESEMPIO 17.2. L'equazione del calore

$$u_t - u_{xx} = 0,$$

in cui  $A = -1$ ,  $B = C = 0$ , soddisfa (17.9). Le sue caratteristiche sono le rette  $t = \text{costante}$ .

L'equazione del calore è l'equazione modello delle equazioni paraboliche.  $\square$

Infine, consideriamo il caso in cui

$$B^2 - AC < 0. \quad (17.11)$$

Questo è il caso delle equazioni *ellittiche*. La trasformazione

$$\xi = Cx - By, \quad \eta = \lambda y, \quad (17.12)$$

con  $\lambda \neq 0$  da scegliere, annulla il coefficiente di  $v_{\xi\eta}$  (per qualunque scelta di  $\lambda$ ). Poi

$$\text{coefficiente di } v_{\xi\xi} = C(AC - B^2), \quad \text{coefficiente di } v_{\eta\eta} = C\lambda^2,$$

sono uguali se  $\lambda = \sqrt{AC - B^2}$ , scelta ammissibile in vista di (17.11). Quindi, a meno di costanti moltiplicative, la parte principale si riduce alla forma canonica  $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \Delta v$ .

ESEMPIO 17.3. L'equazione di Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

in cui  $A = C = 1$  e  $B = 0$ , soddisfa (17.11), e serve da modello per le equazioni ellittiche.  $\square$

## 17.2. Forme quadratiche ed equazioni del secondo ordine

Ricordiamo che una forma quadratica

$$q(\mathbf{x}) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

si dice

definita positiva	se	$q(\mathbf{x}) > 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq (0, 0)$ ;
definita negativa	se	$q(\mathbf{x}) < 0$ per ogni $\mathbf{x} \neq (0, 0)$ ;
semidefinita positiva	se	$q(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x}$ ;
semidefinita negativa	se	$q(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni $\mathbf{x}$ ;
indefinita	se	$q(\mathbf{x})$ prende valori sia positivi che negativi.

La matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

si dice *associata a  $q$* , perché, intendendo  $\mathbf{x}$  come vettore colonna,

$$q(\mathbf{x}) = \mathcal{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice  $\mathcal{A}$  si dice definita [rispettivamente, semidefinita, indefinita] se  $q$  è definita [rispettivamente, semidefinita, indefinita].

È noto che  $q$  (e quindi  $\mathcal{A}$ ) è definita se e solo se

$$\det \mathcal{A} = AC - B^2 > 0,$$

è indefinita se e solo se

$$\det \mathcal{A} = AC - B^2 < 0,$$

ed è semidefinita se

$$\det \mathcal{A} = AC - B^2 = 0.$$

Dunque la classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine si può riformulare così:

DEFINIZIONE 17.4. L'equazione (17.1) si dice iperbolica se  $\mathcal{A}$  è indefinita, parabolica se  $\mathcal{A}$  è semidefinita (ma non definita), ed ellittica se  $\mathcal{A}$  è definita.  $\square$

### 17.3. Equazioni a coefficienti non costanti

Consideriamo l'equazione

$$\mathcal{L}u := A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (17.13)$$

posta in un aperto  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ . Qui  $A, B, C$  sono funzioni continue in  $\Omega$ , che non si annullano mai tutte insieme. Su  $f$  e  $u$  si fanno le ipotesi già viste nella Sezione 17.1. Indichiamo

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A(\mathbf{x}) & B(\mathbf{x}) \\ B(\mathbf{x}) & C(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

DEFINIZIONE 17.5. L'equazione (17.13) si dice iperbolica in  $\mathbf{x}$  se  $\mathcal{A}(\mathbf{x})$  è indefinita, parabolica in  $\mathbf{x}$  se  $\mathcal{A}(\mathbf{x})$  è semidefinita (ma non definita), ed ellittica in  $\mathbf{x}$  se  $\mathcal{A}(\mathbf{x})$  è definita.  $\square$

## Soluzioni deboli di equazioni a derivate parziali del secondo ordine

### 18.1. Il principio di Dirichlet

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (18.1)$$

$$u = u_0, \quad \text{su } \partial\Omega, \quad (18.2)$$

ove  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  è un aperto limitato regolare.

Supponiamo che questo problema abbia soluzione  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , e introduciamo il funzionale

$$J : K \rightarrow \mathbf{R}, \quad K := \{v \in C^2(\overline{\Omega}) \mid v = u_0 \text{ su } \partial\Omega\},$$

definito da

$$J(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

È chiaro che  $u \in K$ .

Trovare il minimo del funzionale  $J$  equivale a trovare la soluzione del problema di Dirichlet.

**TEOREMA 18.1. (PRINCIPIO DI DIRICHLET)**

1) Sia  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  la soluzione di (18.1)–(18.2). Allora

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v), \quad (18.3)$$

ossia

$$\int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \text{per tutte le } v \in K. \quad (18.4)$$

2) Viceversa, se  $u \in K$  e se vale (18.3) (o, il che è lo stesso, (18.4)), allora  $u$  risolve il problema (18.1)–(18.2).

**DIMOSTRAZIONE.** 1) Sia  $v \in K$ . Allora vale

$$\Delta(u - v) = -\Delta v, \quad \text{in } \Omega.$$

Moltiplicando per  $u - v$  e integrando per parti si ottiene (visto che  $u - v = 0$  su  $\partial\Omega$ )

$$-\int_{\Omega} |\nabla(u - v)|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(u - v) \, d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}. \quad (18.5)$$

D'altronde, qualunque sia  $v \in K$ , sempre integrando per parti,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} v \Delta u \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} u_0 \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x}. \quad (18.6)$$

Unendo le (18.5) e (18.6) si ottiene

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} |\nabla(u-v)|^2 \, d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\mathbf{x}. \quad (18.7)$$

Perciò valgono le (18.3) e (18.4). Se in quest'ultima vale l'uguaglianza (ossia se  $v \in K$  è un'altro punto di minimo per  $J$ ), segue da (18.7) che  $\nabla(u-v) \equiv 0$  in  $\Omega$ . Poiché  $u = v$  su  $\partial\Omega$ , allora  $u \equiv v$  in  $\Omega$ .

2) Supponiamo invece che esista il minimo di  $J$  in  $K$ ; denotiamolo con  $u \in K$ . Allora per ogni  $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi = 0$  su  $\partial\Omega$ , vale che

$$u + t\varphi \in K, \quad \text{per ogni } t \in \mathbf{R},$$

cosicché la funzione

$$\Phi(t) = J(u + t\varphi) = \int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 \, d\mathbf{x}, \quad t \in \mathbf{R},$$

ha minimo, pari a  $J(u)$ , in  $t = 0$ . Un calcolo esplicito mostra che

$$\Phi(t) = t^2 \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 \, d\mathbf{x} + 2t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x},$$

e quindi  $\Phi \in C^1(\mathbf{R})$  e deve essere

$$\Phi'(0) = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} = 0. \quad (18.8)$$

Ripetiamo che la (18.8) deve valere per ogni  $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$  con  $\varphi = 0$  su  $\partial\Omega$ . Dato che per ipotesi  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , si può integrare per parti nella (18.8) e ottenere

$$0 = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} = -2 \int_{\Omega} \varphi \Delta u \, d\mathbf{x}, \quad (18.9)$$

per ogni  $\varphi$  come sopra. Questo come è noto implica che  $\Delta u \equiv 0$  in  $\Omega$ , cioè che  $u$  risolve (18.1)–(18.2).  $\square$

## 18.2. Soluzioni deboli

Nella definizione del funzionale  $J$  la richiesta  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  può essere sostituita da  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , come è ovvio. Definiamo cioè

$$J_1 : K_1 \rightarrow \mathbf{R}, \quad K_1 := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v = u_0 \text{ su } \partial\Omega\},$$

mediante la

$$J_1(v) = \int_{\Omega} |\nabla v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}.$$

La seconda parte della dimostrazione del Teorema 18.1 può essere ripetuta con queste nuove definizioni, fino alla (18.9) esclusa, con l'unica variazione che si può prendere  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\varphi = 0$  su  $\partial\Omega$  nella definizione di  $\Phi$ .

A priori,  $u$  è solo una funzione  $C^1$ , e quindi *non* è possibile integrare per parti come nella (18.9), e ottenere  $\Delta u = 0$ ; del resto  $\Delta u$  non è in linea di principio definito.

Se vogliamo interpretare il minimo  $u$  come soluzione di una e.d.p., dobbiamo quindi accontentarci della (18.8) come definizione di soluzione. Vale a dire, poniamo la

DEFINIZIONE 18.2. Una  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  si dice *soluzione debole* (di classe  $C^1$ ) di (18.1)–(18.2) se e solo se:

- a)  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ;  
 b) per ogni  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$  con  $\varphi = 0$  su  $\partial\Omega$ , vale

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x} = 0; \quad (18.10)$$

- c)  $u = u_0$  su  $\partial\Omega$ . □

Le soluzioni definite nel Capitolo 3 saranno nel seguito chiamate anche *soluzioni classiche*, per distinguerle da quelle deboli appena introdotte.

La (18.10) si dice anche *formulazione integrale* (o debole) della (18.1).

OSSERVAZIONE 18.3. Di fatto, si può dimostrare che le soluzioni deboli  $u$  di questo particolare problema al contorno sono in realtà anche in  $C^2(\Omega)$ ; questo però non è vero per problemi di e.d.p. più generali, ove la distinzione tra soluzioni deboli e classiche è effettiva. Dunque è importante sviluppare tecniche per trattare le soluzioni deboli.

Si potrebbe anche dimostrare che  $J_1$  ha in effetti un minimo  $u \in K_1$  (sotto ipotesi opportune su  $u_0$  e  $\Omega$  nel cui dettaglio non entriamo). □

**18.2.1. Le formulazione debole è troppo forte?** Quando si definisce una soluzione debole, è necessario accertarsi che una soluzione classica (ammesso che esista) soddisfi tale definizione, ossia sia anche soluzione debole. Questo garantisce che non stiamo introducendo nel problema restrizioni indebite, estranee alla sua formulazione originale.

TEOREMA 18.4. Una  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  che sia soluzione di (18.1)–(18.2) in senso classico, ne è anche soluzione debole.

DIMOSTRAZIONE. Vanno verificate le tre richieste della Definizione 18.2:

- a) regolarità:  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  per ipotesi;  
 b) equazione differenziale (in forma integrale), ossia la (18.10): se  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  basta integrare per parti

$$0 = \int_{\Omega} \varphi \Delta u \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, d\mathbf{x},$$

per ogni  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$  con  $\varphi = 0$  su  $\partial\Omega$ . Se  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , ma non vale  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , la (18.10) segue ancora approssimando la  $\varphi$  con funzioni in  $C^1(\Omega)$  che si annullino su un *intorno* di  $\partial\Omega$ . Omettiamo i dettagli.

- c) dato al bordo:  $u = u_0$  su  $\partial\Omega$  per ipotesi. □

OSSERVAZIONE 18.5. Si potrebbe obiettare che in effetti la soluzione classica definita nel Capitolo 3 non è per forza di classe  $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , ma solo di classe  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . In effetti, esistono soluzioni classiche che *non*

appartengono a  $C^1(\overline{\Omega})$ , e quindi non possono essere soluzioni deboli secondo la Definizione 18.2. In genere questa viene ritenuta una questione attinente alla regolarità delle soluzioni che non tocca il significato del problema; in altri termini si assume per la soluzione classica tutta la regolarità necessaria per dimostrare che è anche debole (come nel Teorema 18.4). Non è detto però che sia sempre possibile trascurare questo aspetto.  $\square$

**18.2.2. La formulazione debole è troppo debole?** La definizione di soluzioni deboli quindi deve essere abbastanza generale da includere almeno le soluzioni classiche; d'altra parte, non deve essere troppo generale. Per esempio, in linea di principio, potremmo omettere la richiesta c) relativa al dato al bordo dalla Definizione 18.2, e il Teorema 18.4 sarebbe ancora valido. È chiaro però che le 'soluzioni deboli' in questa nuova accezione non conserverebbero traccia della condizione al bordo; in particolare esisterebbero infinite 'soluzioni deboli' ciascuna relativa a un diverso dato al bordo. Per evitare rischi simili, in genere si ritiene necessario dimostrare un risultato di unicità di soluzioni deboli, che garantisca che le richieste fatte sulla soluzione debole conservino, in pratica, la forza di quelle del problema classico.

**TEOREMA 18.6.** *Se la soluzione  $u$  di (18.1)–(18.2) nel senso della Definizione 18.2 esiste, essa è unica.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $u_1, u_2$  due soluzioni deboli. Allora

$$\varphi = u_1 - u_2 \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \text{e} \quad \varphi = u_0 - u_0 = 0 \quad \text{su} \quad \partial\Omega.$$

Dunque deve essere per (18.10)

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla(u_1 - u_2) \, d\mathbf{x} = 0, \quad \int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla(u_1 - u_2) \, d\mathbf{x} = 0,$$

dato che entrambe le  $u_1, u_2$  sono soluzioni. Sottraendo queste due uguaglianze l'una dall'altra si ha

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \, d\mathbf{x} = 0,$$

il che implica  $\nabla(u_1 - u_2) = 0$  in  $\Omega$ . Poiché  $u_1 = u_2$  su  $\partial\Omega$ , segue che  $u_1 \equiv u_2$  in  $\Omega$ .  $\square$

Riassumiamo infine il programma delle sottosezioni 18.2.1 e 18.2.2: la soluzione debole è unica; se esiste una soluzione classica essa è anche la (unica) soluzione debole.

### 18.3. Ricerca di minimi per $J_1$

Diamo un cenno della dimostrazione dell'esistenza di un minimo per  $J_1$ , allo scopo di mostrare l'utilità di spazi funzionali diversi dai 'classici' spazi  $C^m$  di funzioni continue con le loro derivate.

Per definizione di estremo inferiore esiste una successione  $u_n$  di funzioni di  $K_1$  tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_1(u_n) = \inf_{K_1} J_1 =: m \geq 0.$$

Infatti  $m \geq 0$  perché  $J_1(v) \geq 0$  per ogni  $v \in K_1$ . Vogliamo dimostrare che  $m$  è un minimo, cioè che esiste una funzione  $u$  su cui  $J_1$  assume questo valore. La definizione esplicita di  $J_1$  implica che, per ogni scelta di  $v$  e  $w$  in  $K_1$ ,

$$J_1\left(\frac{v-w}{2}\right) + J_1\left(\frac{v+w}{2}\right) = \frac{1}{2}J_1(v) + \frac{1}{2}J_1(w). \quad (18.11)$$

(Questa si dice identità del parallelogramma; perché?) Prendiamo  $v = u_n$ ,  $w = u_k$ . Si ha

$$J_1\left(\frac{u_n - u_k}{2}\right) = \frac{1}{2}J_1(u_n) + \frac{1}{2}J_1(u_k) - J_1\left(\frac{u_n + u_k}{2}\right) \leq \frac{1}{2}J_1(u_n) + \frac{1}{2}J_1(u_k) - m,$$

per la definizione di  $m$ , e il fatto che  $(u_n + u_k)/2 \in K_1$ . D'altra parte, fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste  $n_\varepsilon \geq 1$  tale che, per  $n, k \geq n_\varepsilon$ ,

$$J_1(u_n), J_1(u_k) \leq m + \varepsilon,$$

perché  $J_1(u_n) \rightarrow m$ . Dunque per  $n, k \geq n_\varepsilon$ ,

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_k|^2 \, d\mathbf{x} = J_1\left(\frac{u_n - u_k}{2}\right) \leq \frac{m + \varepsilon}{2} + \frac{m + \varepsilon}{2} - m = \varepsilon. \quad (18.12)$$

Perciò la successione dei gradienti  $\nabla u_n$  (o le successioni delle componenti scalari di  $\nabla u_n$ , se si preferisce) sono di Cauchy in  $L^2(\Omega)$ . Poiché  $L^2(\Omega)$  è completo, esiste un vettore  $\mathbf{p}$  tale che

$$\nabla u_n \rightarrow \mathbf{p}, \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

(nel senso che ciascuna delle componenti converge in  $L^2(\Omega)$ ).

Per la disuguaglianza di Poincaré in Lemma C.8, visto che  $u_n - u_k = 0$  su  $\partial\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} |u_n - u_k|^2 \, d\mathbf{x} \leq C \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u_k|^2 \, d\mathbf{x} \leq 4C\varepsilon, \quad n, k \geq n_\varepsilon,$$

e dunque anche  $u_n$  è di Cauchy in  $L^2(\Omega)$ , e converge nel senso di  $L^2(\Omega)$  a una funzione  $u$ . Vale allora che  $\mathbf{p} = \nabla u$  nel senso delle derivate di Sobolev (vedi Sottosezioni 18.5.3 e 18.5.4).

Infine

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} |\mathbf{p}|^2 \, d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \, d\mathbf{x} = m.$$

Perciò  $u$  sarebbe punto di minimo per  $J_1$ , se fosse  $u \in K_1$ . Ma questo non risulta dall'argomento sopra, che invece introduce  $u$  come una funzione in  $L^2(\Omega)$  con derivate nel senso di Sobolev.

Per questo motivo, cioè in sostanza per salvare la validità del ragionamento svolto qui sopra, è bene porsi in questi spazi di funzioni (invece che in  $C^1(\overline{\Omega})$ ) per discutere la minimizzazione di funzionali del tipo di  $J_1$ . In questa ambientazione,  $u$  è davvero il punto di minimo cercato.

#### 18.4. Soluzioni deboli di equazioni non regolari

Nelle Sezioni 18.1–18.2 abbiamo visto come le soluzioni deboli appaiano di necessità in un contesto variazionale, ossia quando si trovano soluzioni di e.d.p. come punti di minimo di funzionali. Tuttavia esse possono essere introdotte in modo indipendente da ogni approccio variazionale. Un caso

tipico in cui è naturale considerare soluzioni deboli è quello in cui l'irregolarità dei coefficienti dell'equazione rende impossibile l'esistenza di soluzioni classiche.

Prendiamo come esempio il problema di diffusione del calore con dati di Neumann

$$u_t - \operatorname{div}(a(\mathbf{x})\nabla u) = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad (18.13)$$

$$a(\mathbf{x})\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, T), \quad (18.14)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \text{in } \Omega. \quad (18.15)$$

Qui la diffusività  $a > 0$  è una funzione limitata e misurabile, ma non continua. Per esempio  $\Omega$  può essere costituito da due regioni  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , ciascuna riempita da un materiale con diffusività  $a_i \in (0, \infty)$ ,  $a_1 \neq a_2$ . In questo caso si ha

$$a(\mathbf{x}) = a_1\chi_{\Omega_1}(\mathbf{x}) + a_2\chi_{\Omega_2}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

È chiaro che (18.13) non ha soluzioni nel senso classico, se non altro perché  $a(\mathbf{x})$  non è derivabile.

In casi come questo si integra in modo formale per parti la e.d.p., per 'scaricare' su una funzione test alcune delle derivate, ossia quelle 'eccessive' per la (scarsa) regolarità del problema. Moltiplichiamo dunque l'equazione per una  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$  e integriamo per parti come se tutte le derivate fossero continue. Si ha

$$\int_0^T \int_{\Omega} \{u_t \varphi + a(\mathbf{x})\nabla u \cdot \nabla \varphi\} d\mathbf{x} dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \varphi a(\mathbf{x})\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma dt = 0, \quad (18.16)$$

ove si è usato il dato al bordo (18.14). Il nostro problema è quindi trovare una  $u$  che soddisfi

$$\int_0^T \int_{\Omega} \{u_t \varphi + a(\mathbf{x})\nabla u \cdot \nabla \varphi\} d\mathbf{x} dt = 0, \quad (18.17)$$

per ogni  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$ .

Si noti che la (18.17) non contiene derivate di  $a$ . Resta da capire in quale classe di funzioni si deve cercare la soluzione  $u$ ; si potrebbe vedere che per esempio  $\nabla u$  non può essere continuo; nella Sezione 18.5.5 torniamo sulla questione. Qui diciamo solo che, per dare un significato all'integrale nella (18.17), la continuità di  $\nabla u$  è comunque superflua: basta che  $\nabla u$  sia una funzione integrabile. Possiamo quindi cercare soluzioni deboli in una classe molto più vasta di quella delle soluzioni classiche.

**18.4.1. Dati al bordo e iniziali per soluzioni deboli.** La (18.17), qualora se ne richieda la validità per ogni  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$  contiene non solo la e.d.p. (18.13), ma anche il dato di Neumann (18.14), che infatti è stato usato per ricavarla. In altre parole, essa *non* sarebbe valida per una soluzione di (18.13) che, al posto di (18.14), soddisfacesse invece

$$a(\mathbf{x})\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} = f(\mathbf{x}, t), \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, T), \quad (18.18)$$

per una generica funzione  $f$ ; questo segue subito da (18.16).

OSSERVAZIONE 18.7. Supponiamo invece di indebolire la (18.17), richiedendo che valga non per tutte le  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$ , ma solo per le  $\varphi \in C_0^1(\Omega \times [0, T])$ , ossia per le  $\varphi$  che si annullano in un intorno di  $\partial\Omega$ . La (18.16) mostra che non occorre assumere la (18.14) per ottenere la (18.17) con la nuova restrizione su  $\varphi$ . Ossia, restringendo il campo di variazione delle funzioni test  $\varphi$ , la stessa formulazione integrale (18.17) assume significati diversi: in questo secondo caso in effetti equivale alla sola e.d.p. (18.13).  $\square$

Infine, osserviamo che alla (18.17) va unita la richiesta che la  $u$  soddisfi la condizione iniziale (18.15); in quale senso preciso questo vada imposto dipenderà dalla regolarità di  $u$ . Se per esempio  $u$  e  $u_0$  sono continue, si richiederà che (18.15) valga nel classico senso puntuale, cioè

$$\lim_{(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}_0, 0)} u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}_0).$$

Se  $u_0 \notin C(\Omega)$ , le cose si complicano, ma si possono ancora sistemare (vedi Sottosezione 18.5.4).

**18.4.2. Unicità di soluzioni deboli.** L'idea della dimostrazione dell'unicità di soluzioni deboli è la stessa usata nel Teorema 6.7, e nel Teorema 18.6. La ripercorriamo qui perché ci permette di discutere ancora la definizione di soluzione debole.

Questa definizione andrà posta in modo che risulti rigoroso il seguente argomento:

Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni deboli di (18.13)–(18.15). Poniamo  $z = u_1 - u_2$ . Per linearità,  $z$  risolve (18.17) per ogni  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$ , e corrisponde al dato iniziale  $z(\mathbf{x}, 0) \equiv 0$ . Prendiamo  $\varphi = z$  in (18.17). Questo in effetti è un punto critico, perché abbiamo detto che  $u_1, u_2 \notin C^1(Q_T)$ , mentre le funzioni test  $\varphi$  sono state scelte di classe  $C^1$ . La difficoltà si risolve osservando che quest'ultima restrizione è di fatto eccessiva: l'integrale in (18.17) ha senso anche se  $\nabla\varphi$  non è continuo, purché  $a\nabla u \cdot \nabla\varphi$  sia integrabile. In sostanza bisogna quindi richiedere che  $|\nabla u_i| \in L^2(Q_T)$ .

La dimostrazione si completa integrando per parti il termine con la derivata temporale (per la quale del resto in principio varrebbero considerazioni simili a quelle svolte per il gradiente spaziale). Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\Omega} \{z_t z + a(\mathbf{x})|\nabla z|^2\} d\mathbf{x} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} z(\mathbf{x}, T)^2 d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\Omega} a(\mathbf{x})|\nabla z|^2 d\mathbf{x} dt. \end{aligned}$$

Segue che  $z(\mathbf{x}, T) \equiv 0$ ; d'altra parte questo argomento si può ripetere sostituendo a  $T$  un qualsiasi istante  $0 < t < T$ , e quindi  $z \equiv 0$  in  $\Omega \times (0, T)$ .

### 18.5. Un caso concreto di ricerca di soluzioni deboli

Consideriamo il problema

$$u_t - (a(x)u_x)_x = 0, \quad \text{in } Q_T = (0, L) \times (0, T), \quad (18.19)$$

$$a(0)u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.20)$$

$$a(L)u_x(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.21)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \quad (18.22)$$

Questo è il caso unidimensionale del problema (18.13)–(18.15). Qui  $a$  è misurabile e limitata su  $\mathbf{R}$ , ed esistono due costanti  $A_0 > a_0 > 0$  tali che

$$A_0 \geq a(x) \geq a_0, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (18.23)$$

Per concentrarci sulla difficoltà posta dal coefficiente  $a$ , supponiamo che  $u_0$  sia regolare, per esempio  $u_0 \in C_0^\infty((0, L))$ .

La risoluzione della formulazione debole del problema consta dei seguenti passi:

- (1) *Approssimazione* della soluzione del problema con una successione  $\{u_n\}$  di soluzioni classiche a problemi regolari.
- (2) Determinazione di *Stime uniformi* di  $\{u_n\}$ .
- (3) *Passaggio al limite* per  $n \rightarrow \infty$ , ove si dimostra che  $\{u_n\}$  ha un limite  $u$  che risolve il problema originario.

**18.5.1. Approssimazione.** Qui si usa la teoria dell'esistenza di soluzioni classiche a problemi con coefficienti e dati molto regolari; è una teoria ben nota, per certi versi più complessa di quella dell'esistenza di soluzioni deboli. D'altra parte la usiamo per risolvere problemi ausiliari, quindi possiamo in qualche senso scegliere noi il problema da risolvere.

Qui scegliamo il problema come

$$u_{nt} - (a_n(x)u_{nx})_x = 0, \quad \text{in } Q_T = (0, L) \times (0, T), \quad (18.24)$$

$$a_n(0)u_{nx}(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.25)$$

$$a_n(L)u_{nx}(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.26)$$

$$u_n(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L, \quad (18.27)$$

ove  $a_n \in C^\infty(\mathbf{R})$  approssima  $a$  nel senso che

$$a_n \rightarrow a, \quad \text{quasi ovunque in } (0, L),$$

e soddisfa inoltre le maggiorazioni in (18.23). Per esempio, si può vedere che la convoluzione  $a * \varphi_n$ , ove i  $\varphi_n$  sono i nuclei di approssimazione del Capitolo 11, soddisfa queste richieste.

La teoria su accennata garantisce che esiste una unica soluzione classica  $u_n$  di (18.24)–(18.27), e che anzi  $u_n \in C^\infty(\overline{Q_T})$ .

**18.5.2. Stime uniformi di  $u_n$ .** Questa parte prepara al passaggio al limite per la successione delle soluzioni approssimanti già trovate. Per stima uniforme intendiamo qui una stima uniforme su  $n$ , ossia *non dipendente* da  $n$ .

Ricaveremo le stime usando il *metodo dell'energia*, ossia moltiplicando la e.d.p. per funzioni opportune (ad esempio la soluzione medesima), e integrando per parti.

Integrando allora per parti su  $(0, L) \times (0, t)$  l'uguaglianza

$$u_{nt}u_n - (a_n(x)u_{nx})_x u_n = 0,$$

si ha per ogni  $t$

$$\frac{1}{2} \int_0^L u_n(x, t)^2 dx + \int_0^t \int_0^L a_n(x) |u_{nx}(x, \tau)|^2 dx d\tau = \frac{1}{2} \int_0^L u_0(x)^2 dx =: M_0.$$

Prendendo il sup su  $0 < t < T$

$$\sup_{0 < t < T} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L u_n(x, t)^2 dx \right\} + \int_0^T \int_0^L a_n(x) |u_{nx}(x, \tau)|^2 dx d\tau \leq 2M_0. \quad (18.28)$$

In realtà in questo caso è possibile fare di meglio: moltiplichiamo la e.d.p. per  $u_{nt}$ ,

$$u_{nt}^2 - (a_n(x)u_{nx})_x u_{nt} = 0,$$

e integriamo per parti. Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t \int_0^L u_{n\tau}(x, \tau)^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^L a_n(x) u_{nx}(x, \tau) u_{nx\tau}(x, \tau) dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^L u_{n\tau}(x, \tau)^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^L a_n(x) u_{nx}(x, t)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L a_n(x) u_{nx}(x, 0)^2 dx, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} &\sup_{0 < t < T} \int_0^L u_{nx}(x, t)^2 dx + \int_0^T \int_0^L u_{n\tau}(x, \tau)^2 dx d\tau \\ &\leq \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{a_0} \right) \int_0^L a_n(x) u_{nx}(x, 0)^2 dx \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{a_0} \right) \int_0^L a_n(x) u_0'(x)^2 dx \\ &\leq A_0 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{a_0} \right) \int_0^L u_0'(x)^2 dx =: M_1. \end{aligned} \quad (18.29)$$

OSSERVAZIONE 18.8. Il ragionamento che ha condotto a (18.29) non si potrebbe ripetere se  $a$  (e quindi  $a_n$ ) dipendesse anche dal tempo  $t$ . La (18.28) invece continuerebbe a valere.  $\square$

Da (18.28) e da (18.29) segue che esiste una costante  $M$ , indipendente da  $n$ , tale che

$$\int_0^T \int_0^L \{u_n^2 + u_{nx}^2 + u_{nt}^2\} dx dt \leq M, \quad \text{per ogni } n \geq 1. \quad (18.30)$$

Questa è la stima uniforme che cercavamo per la nostra successione. Un'altra stima uniforme (che non useremo) è

$$\sup_{Q_T} |u_n| \leq \sup_{(0,L)} |u_0|. \quad (18.31)$$

Questa è una conseguenza del principio del massimo, che vale anche per il nostro problema.

**18.5.3. Passaggio al limite.** Per passare al limite si usano risultati dell'analisi funzionale, cioè la teoria di base degli spazi  $L^2$  e di Sobolev (vedi sotto per questi ultimi). Il vantaggio di questa teoria è quello di essere molto potente e flessibile, ossia applicabile con facilità a problemi diversi delle e.d.p. e più in generale della modellistica matematica.

Per esempio, si sa che da una successione  $\{u_n\}$  che soddisfa (18.30) si può estrarre una sottosuccessione (che noi continuiamo, con abuso di notazione, a denotare come la successione intera  $\{u_n\}$ ) che converge nel senso di  $L^2(Q_T)$  a una funzione misurabile  $u$  tale che

$$\|u\| = \left( \iint_{Q_T} u^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \quad \text{ossia } u \in L^2(Q_T).$$

Per di più, anche le derivate  $u_{nx}$  e  $u_{nt}$  convergono debolmente a due funzioni  $w$  e  $v$  in  $L^2(Q_T)$  (vedi Sottosezione A.3.1). Dunque la convergenza ha luogo nel senso che per  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ in } L^2(Q_T), \text{ ossia } \|u_n - u\| \rightarrow 0; \\ u_{nx} &\rightarrow w, \quad u_{nt} \rightarrow v \text{ debolmente in } L^2(Q_T); \\ u_n &\rightarrow u \text{ quasi ovunque in } Q_T. \end{aligned} \quad (18.32)$$

Nella Sottosezione 18.5.4 vedremo che si possono identificare  $w = u_x$ ,  $v = u_t$ ; quindi queste derivate di  $u$  esistono come funzioni  $L^2$ . Per il momento compiamo senz'altro questa identificazione.

Per dimostrare che  $u$  risolve il problema originario, scriviamo la formulazione debole, o integrale, del problema approssimante (18.24)–(18.27), cioè

$$\iint_{Q_T} \{u_{nt}\varphi + a_n(x)u_{nx}\varphi_x\} \, dx \, dt = 0, \quad \varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T]). \quad (18.33)$$

Per  $n \rightarrow \infty$  la definizione di convergenza debole implica che

$$\iint_{Q_T} u_{nt}\varphi \, dx \, dt \rightarrow \iint_{Q_T} u_t\varphi \, dx \, dt.$$

L'analoga convergenza, che pure è valida,

$$\iint_{Q_T} a_n(x)u_{nx}\varphi_x \, dx \, dt \rightarrow \iint_{Q_T} a(x)u_x\varphi_x \, dx \, dt$$

richiederebbe in effetti un argomento aggiuntivo perché anche il coefficiente  $a_n$  varia con  $n$ . Comunque, per  $n \rightarrow \infty$ , la (18.33) dà

$$\iint_{Q_T} \{u_t\varphi + a(x)u_x\varphi_x\} \, dx \, dt = 0, \quad \varphi \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T]). \quad (18.34)$$

Perciò la  $u$  è una soluzione debole; il comportamento per  $t \rightarrow 0$ , ossia il dato iniziale, verrà discusso nella Sottosezione 18.5.4.

**18.5.4. Ancora sul passaggio al limite. Derivate nel senso di Sobolev.** Ritorniamo sulla convergenza in (18.32), e sull'identificazione  $w = u_x$ ,  $v = u_t$ . Si sa dunque che

$$\iint_{Q_T} u_{nx} \varphi \, dx \, dt \rightarrow \iint_{Q_T} w \varphi \, dx \, dt, \quad (18.35)$$

per ogni  $\varphi \in L^2(Q_T)$ , per esempio se  $\varphi \in C_o^1(Q_T)$ . In quest'ultimo caso si ha, integrando per parti,

$$\iint_{Q_T} u_{nx} \varphi \, dx \, dt = - \iint_{Q_T} u_n \varphi_x \, dx \, dt. \quad (18.36)$$

Confrontando (18.35) con (18.36) si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} u_n \varphi_x \, dx \, dt = - \iint_{Q_T} w \varphi \, dx \, dt.$$

D'altronde, poiché  $u_n \rightarrow u$  in  $L^2(Q_T)$ , e quindi anche nel senso debole, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{Q_T} u_n \varphi_x \, dx \, dt = \iint_{Q_T} u \varphi_x \, dx \, dt.$$

Abbiamo *dimostrato*

$$\iint_{Q_T} w \varphi \, dx \, dt = - \iint_{Q_T} u \varphi_x \, dx \, dt, \quad (18.37)$$

per ogni  $\varphi \in C_0^1(Q_T)$ . Se  $u \in C^1(Q_T)$ , questa uguaglianza è soddisfatta se  $w = u_x$ . Anzi, si può vedere, per l'arbitrarietà di  $\varphi$ , che in effetti se  $u \in C^1(Q_T)$ , e vale la (18.37), allora *deve essere*  $w = u_x$ .

Anche se  $u \notin C^1(Q_T)$ , noi *definiamo* derivata di  $u$  nel senso di Sobolev la  $w$ , e continuiamo (con abuso di notazione) a denominarla con  $u_x$ . Si vede subito che se esistono due derivate  $w_1$  e  $w_2$  di  $u$  nel senso di Sobolev, esse devono coincidere quasi ovunque in  $Q_T$ , perché per ogni  $\varphi \in C_0^1(Q_T)$

$$\iint_{Q_T} w_1 \varphi \, dx \, dt = - \iint_{Q_T} u \varphi_x \, dx \, dt = \iint_{Q_T} w_2 \varphi \, dx \, dt.$$

Ricapitolando

**DEFINIZIONE 18.9.** Sia  $u \in L^2(Q_T)$ . Si dice che  $w \in L^2(Q_T)$  è la derivata di  $u$  (rispetto a  $x$ ) nel senso di Sobolev, se per ogni  $\varphi \in C_0^1(Q_T)$  vale la (18.37).  $\square$

Nello stesso modo si definisce la derivata nel senso di Sobolev rispetto a  $t$ , che denotiamo ancora con  $u_t$ .

Il motivo per cui si introducono le derivate nel senso di Sobolev è, in fondo, nel passaggio al limite che conduce da (18.33) a (18.34). Un'altra proprietà utile di queste derivate è illustrata dal ragionamento seguente. Sia  $u$  la funzione limite introdotta nella Sottosezione 18.5.3. Si potrebbe vedere che

anche per le derivate nel senso di Sobolev, vale, quasi ovunque per  $0 < t < T$ , l'usuale formula

$$\int_0^L [u(x, t) - u_0(x)]^2 dx = \int_0^L \left[ \int_0^t u_\tau(x, \tau) d\tau \right]^2 dx \leq t \int_0^L \int_0^t u_\tau^2 dx d\tau = t \|u_t\|^2,$$

ove si è usata anche la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Perciò  $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$  nel senso di  $L^2((0, L))$ , se  $t \rightarrow 0$ . Questa è una possibile interpretazione della condizione iniziale (18.22) per le soluzioni deboli.

**18.5.5. Le condizioni di interfaccia.** Supponiamo ora che, per un  $c \in (0, L)$  fissato, il coefficiente  $a$  sia dato come e  $a_1, a_2 > 0, a_1 \neq a_2$ ,

$$a(x) = \begin{cases} a_1, & 0 < x < c, \\ a_2, & c < x < L; \end{cases} \quad a_1, a_2 > 0, \quad a_1 \neq a_2.$$

Allora la formulazione debole di (18.19)–(18.22) equivale alla seguente:

$$u_t - a_1 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < c, 0 < t < T, \quad (18.38)$$

$$u_t - a_2 u_{xx} = 0, \quad c < x < L, 0 < t < T, \quad (18.39)$$

$$a_1 u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.40)$$

$$a_2 u_x(L, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (18.41)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L. \quad (18.42)$$

Questo problema *deve* essere accoppiato con le condizioni di interfaccia (dette anche *condizioni di diffrazione*)

$$u(c-, t) = u(c+, t), \quad 0 < t < T, \quad (18.43)$$

$$a_1 u_x(c-, t) = a_2 u_x(c+, t), \quad 0 < t < T. \quad (18.44)$$

In altre parole, si hanno due problemi per due equazioni del calore (con diffusività diverse), posti in due domini distinti:

$$Q_T^- = (0, c) \times (0, T), \quad Q_T^+ = (c, L) \times (0, T).$$

Le (18.38)–(18.42) contengono le e.d.p. e i dati per questi problemi, ad eccezione dei dati su  $x = c$ , che però sono necessari per avere unicità di soluzioni. Questi ultimi dati sono assegnati in (18.43)–(18.44), ma non come dati indipendenti (per esempio, i valori di  $u(c-, t)$  e  $u(c+, t)$ ); invece sono prescritti come condizioni di accoppiamento dei due problemi in  $Q_T^-$  e  $Q_T^+$ . Per convincersi che le condizioni di diffrazione in effetti identificano la soluzione debole introdotta sopra, si ragioni così: sia  $u$  una soluzione di (18.38)–(18.42), regolare (per esempio  $C^{2,1}$ ) in  $Q_T^-$  e in  $Q_T^+$ , ma, a priori, svincolata dalle condizioni (18.43)–(18.44). Moltiplicando la e.d.p. in ciascuno dei due domini per una  $\varphi \in C^1(\overline{Q_T})$ , e integrando per parti si ottengono due equazioni integrali, contenenti ciascuna un termine di bordo su  $x = c$ ; questi termini di bordo si possono eliminare tra le due equazioni se vale (18.44); si ottiene così proprio (18.34): perciò  $u$  è la (unica) soluzione debole. Occorre ancora una precisazione sulla condizione (18.43), che non è stata usata in questo argomento.

Tuttavia la (18.43) è necessaria perché valga la formula di integrazione per parti in (18.37), con  $w = u_x$ : si può verificare con calcoli diretti che una  $u$  regolare quanto si vuole in ciascuno dei due aperti  $Q_T^-$  e in  $Q_T^+$ , ma non

continua attraverso  $x = c$ , non può soddisfare (18.37) (si prenda per esempio  $u = \chi_{Q_T^+}$ , cosicché  $u_x \equiv 0$  in ciascun aperto). In altre parole la prima condizione di diffrazione è una conseguenza della regolarità richiesta alla soluzione  $u$ .

### 18.6. Il metodo di Galerkin

Fissiamo un sistema ortonormale completo  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  in  $L^2((0, L))$ , tale che  $\varphi_n \in C^1([0, L])$ , e che

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(L) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Consideriamo il problema in  $Q_T = (0, L) \times (0, T)$

$$u_t - (a(x)u_x)_x = 0, \quad \text{in } Q_T, \quad (18.45)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x = 0, x = L, 0 < t < T, \quad (18.46)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L, \quad (18.47)$$

ove, per un'opportuna  $C > 1$ ,

$$a \in L^2((0, L)), \quad C^{-1} \leq a(x) \leq C, \quad (18.48)$$

e

$$u_0 \in L^2((0, L)). \quad (18.49)$$

Cerchiamo una soluzione di (18.45)–(18.47) come limite di una successione approssimante. La soluzione approssimante  $u_k$  di livello  $k$  si ottiene “proiettando” il problema sul sottospazio di  $L^2(Q_T)$

$$V_k = \left\{ \zeta(x, t) = \sum_{n=1}^k \lambda_n(t) \varphi_n(x) \mid \lambda_n \in C^1([0, T]) \right\},$$

ove  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  il sistema ortonormale scelto. Si sostituisce in modo formale

$$u_k(x, t) = \sum_{n=1}^k \alpha_n^k(t) \varphi_n(x) \quad (18.50)$$

in (18.45), si moltiplica per  $\varphi_i(x)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , e si integra su  $(0, L)$  per parti, ottenendo

$$\frac{d\alpha_i^k}{dt}(t) + \int_0^L a(x) u_{kx}(x, t) \varphi_i'(x) dx = 0. \quad (18.51)$$

Si noti che (18.51) si può mettere nella forma

$$\frac{d\alpha_i^k}{dt}(t) = \sum_{n=1}^k A_{in} \alpha_n^k(t), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (18.52)$$

ove

$$A_{in} = - \int_0^L a(x) \varphi_n'(x) \varphi_i'(x) dx.$$

Il sistema lineare di e.d.o. (18.52) ha come dato iniziale

$$\alpha_i^k(0) = \int_0^L u_0(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (18.53)$$

Il problema di Cauchy (18.52)–(18.53) ha un'unica soluzione  $\alpha_i^k \in C^1([0, T])$ , che quindi determina l'approssimazione (18.50) di livello  $k$ . Si potrebbe mostrare che (sotto le opportune ipotesi) la  $\{u_k\}$  converge in effetti a una soluzione debole di (18.45)–(18.47).

**18.6.1. Il metodo di Fourier come caso particolare del metodo di Galerkin.** A differenza che nel metodo di Fourier i coefficienti  $\alpha_i^k$  (per  $i$  fissato) qui cambiano con  $k$ . Infatti ciascuna delle equazioni che compongono il sistema (18.52) cambia con  $k$ , perfino se i coefficienti del sistema sono indipendenti da  $k$ . Per la precisione, la somma in (18.52) contiene un numero di termini pari a  $k$ .

D'altra parte il metodo di Fourier può essere visto come un caso particolare di quello di Galerkin. Infatti, sia

$$a \equiv 1,$$

e scegliamo per semplicità di calcolo  $L = \pi$ . Dunque si può scegliere

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots \quad (18.54)$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned} A_{in} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin(nx))' (\sin(ix))' dx \\ &= -in \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx) \cos(ix) dx = \begin{cases} -i^2, & i = n, \\ 0, & i \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Perciò (18.52) diviene

$$\frac{d\alpha_i^k}{dt} = -i^2 \alpha_i^k. \quad (18.55)$$

La (18.55), insieme con la (18.53), mostra che (per  $i$  fissato)  $\alpha_i^k$  di fatto *non* dipende da  $k$ . Si noti anche che la (18.55) coincide in sostanza con la (9.31). Infine osserviamo che la scelta (18.54) è possibile qualunque sia la funzione  $a$  come in (18.48); a differenza che nel metodo di Fourier, nel metodo di Galerkin la scelta del sistema ortonormale è svincolata dalla forma dei coefficienti dell'equazione.

Parte 8

Appendici



## APPENDICE A

### Integrazione di funzioni non continue

Le funzioni considerate in questo capitolo non sono in genere continue nel loro dominio di definizione; vogliamo descrivere in breve alcune proprietà dell'integrale di Lebesgue, che è molto più potente di quello di Riemann, e in pratica necessario per trattare e.d.p.. Piuttosto che svolgere una trattazione rigorosa dell'argomento, inattuabile qui per motivi di complessità e lunghezza, diamo alcune idee introduttive, e metodi di calcolo.

#### A.1. Insiemi di misura (di Lebesgue) nulla

Per ogni sfera aperta  $B \subset \mathbf{R}^N$  si definisce il volume di  $B$

$$|B| = \omega_N r^N, \quad \text{se } B = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \mid |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r\};$$

$\omega_N$  è quindi il volume di una sfera di raggio 1, e

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = \pi, \quad \omega_3 = \frac{4}{3}\pi, \quad \dots$$

DEFINIZIONE A.1. Un insieme  $E \subset \mathbf{R}^N$  si dice di misura nulla secondo Lebesgue se e solo se, per ogni prefissato  $\varepsilon > 0$ , esiste una successione  $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$  di sfere aperte di  $\mathbf{R}^N$  tali che

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \leq \varepsilon. \quad (\text{A.1})$$

□

ESEMPIO A.2. L'insieme dei numeri razionali di  $[0, 1]$ , ossia  $E = \mathbf{Q} \cap [0, 1]$  ha misura nulla in  $\mathbf{R}$ . La dimostrazione vale per ogni insieme numerabile: scriviamo

$$E = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$  e definiamo le sfere di  $\mathbf{R}$  (ossia gli intervalli)

$$B_k = \left( q_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, q_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right), \quad k \geq 1.$$

È ovvio che  $E \subset \cup_k B_k$ , e

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Si noti che  $\cup_k B_k$  è un aperto denso, ma 'di misura piccola' in  $[0, 1]$ . □

ESEMPIO A.3. Il semiasse positivo

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \mid x_1 > 0, x_2 = 0, \dots, x_N = 0\},$$

ha misura nulla se  $N > 1$ . Infatti: Fissiamo  $\varepsilon > 0$ , e definiamo le successioni

$$a_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$$

(cosicché  $a_k \rightarrow \infty$  se  $k \rightarrow \infty$ ), e

$$B_k = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \mid (x_1 - \varepsilon^{1/N} a_k)^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2 < \frac{\varepsilon^{2/N}}{k^2} \right\}.$$

Vale

$$B_k \cap E = \{ \mathbf{x} \mid x_1 \in I_k, x_2 = 0, \dots, x_N = 0 \},$$

ove  $I_k = (\varepsilon^{1/N} a_k - \varepsilon^{1/N}/k, \varepsilon^{1/N} a_k + \varepsilon^{1/N}/k)$ . Si noti che gli  $I_k$  coprono tutto il semiasse positivo, perché 'si sovrappongono' in parte:

$$\varepsilon^{1/N} a_k + \frac{\varepsilon^{1/N}}{k} > \varepsilon^{1/N} a_k + \frac{\varepsilon^{1/N}}{k+1} = \varepsilon^{1/N} a_{k+1}, \quad k \geq 1.$$

Perciò la prima delle (A.1) è soddisfatta; resta da provare la seconda, che segue subito da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_N \frac{\varepsilon}{k^N} = \omega_N \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^N} = C(N) \varepsilon,$$

a patto di una inessenziale ridefinizione di  $\varepsilon$ .  $\square$

OSSERVAZIONE A.4. La proprietà di un insieme di essere di misura nulla dipende dallo spazio ambiente: per esempio il semiasse positivo non è certo di misura nulla in  $\mathbf{R}$ . Un quadrato è di misura nulla in  $\mathbf{R}^3$ , ma non in  $\mathbf{R}^2$ , e così via.  $\square$

OSSERVAZIONE A.5. Si può dimostrare che l'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla, e anzi di una loro infinità numerabile, ha ancora misura nulla.  $\square$

DEFINIZIONE A.6. Si dice che una proprietà vale *quasi ovunque* (abbreviato in q.o.) se l'insieme in cui non vale ha misura nulla.  $\square$

In particolare date due funzioni  $f, g : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ , si dice che

$$f \leq g \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}^N,$$

se e solo se l'insieme

$$E = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \mid f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x}) \}$$

ha misura nulla in  $\mathbf{R}^N$ .

## A.2. Funzioni integrabili

Una funzione  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  si dice misurabile secondo Lebesgue se esiste una successione di funzioni continue  $\varphi_n \in C(\mathbf{R}^N)$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \text{q.o. in } \mathbf{R}^N. \quad (\text{A.2})$$

Le funzioni continue a tratti sono misurabili.

ESEMPIO A.7. La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ è irrazionale,} \\ 0, & x \text{ è razionale,} \end{cases}$$

è misurabile su  $[0, 1]$ . Infatti si sa che  $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$  ha misura nulla (vedi Esempio A.2). Dunque la successione

$$\varphi_n(x) = \left( 1 - n \operatorname{dist}([0, 1], x) \right)_+ = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ (1 + nx)_+, & x < 0, \\ (1 - n(x - 1))_+, & x > 1, \end{cases}$$

è una successione di funzioni continue, nulle fuori di  $[-1, 2]$ , e converge q.o. su  $\mathbf{R}$  a  $f\chi_{[0,1]}$ .  $\square$

Troveremo l'integrale di funzioni misurabili in tre passi successivi.

**A.2.1. Funzioni limitate e nulle fuori di un limitato.** Sia  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  misurabile secondo Lebesgue e tale che esista un  $M > 0$  con le proprietà

$$|f(\mathbf{x})| \leq M, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N, \quad f(\mathbf{x}) = 0, \quad |\mathbf{x}| \geq M. \quad (\text{A.3})$$

Si noti che in questo caso non è restrittivo supporre che anche le  $\varphi_n$  siano uniformemente limitate: assegnata una successione come in (A.2) basta infatti considerare

$$\psi_n(\mathbf{x}) = \max(-M - 1, \min(M + 1, \varphi_n(\mathbf{x}))).$$

Allora  $\psi_n$  soddisfa ancora (A.2), e  $|\psi_n| \leq M + 1$ , per ogni  $n$ .

Si ha allora

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|\mathbf{x}| \leq M\}} \varphi_n(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (\text{A.4})$$

per una successione  $\varphi_n$  di funzioni continue che soddisfino (A.2) e  $|\varphi_n| \leq M'$ , per ogni  $n$  e per qualche  $M' > 0$ . L'integrale a sinistra nella (A.4) è l'integrale di Lebesgue; gli integrali a destra sono gli usuali integrali di Riemann di funzioni continue.

Si noti che questo limite non dipende dalla particolare successione  $\varphi_n$  scelta con queste proprietà; omettiamo la dimostrazione.

**A.2.2. Funzioni non negative.** Se  $f$  non è limitata, o non è nulla fuori di un limitato, non è detto che il suo integrale si possa definire. Prima di trattare il caso generale occorre premettere il caso di funzioni non negative, per le quali l'integrale è sempre definito.

Sia  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  misurabile e non negativa. Vale, posto  $B_k = \{|\mathbf{x}| \leq k\}$ ,

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^N} \chi_{B_k}(\mathbf{x}) \min(k, f(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{A.5})$$

Per ciascun  $k$  fissato l'integrale a destra è definito nella Sottosezione A.2.1; la successione di questi integrali è non decrescente in  $k$ , e dunque il limite esiste.

L'integrale di funzioni misurabili non negative risulta perciò sempre definito; può essere un numero reale non negativo, o anche  $\infty$ .

**A.2.3. Funzioni generali.** Sia ora  $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  una qualunque funzione misurabile. Dobbiamo assumere che

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} < \infty \quad (\text{A.6})$$

(questo integrale è stato introdotto in (A.5); per questo abbiamo bisogno di trattare prima il caso di funzioni non negative). Allora vale

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^N} \chi_{B_k}(\mathbf{x}) \max(-k, \min(k, f(\mathbf{x}))) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{A.7})$$

Si potrebbe dimostrare che in effetti il limite esiste ed è un numero reale.

Infine, si dice che  $E \subset \mathbf{R}^N$  è misurabile secondo Lebesgue se la sua funzione caratteristica  $\chi_E$  è misurabile nel senso detto sopra. Per un qualunque insieme misurabile  $E$ , e funzione  $f : E \rightarrow \mathbf{R}$  si dice che  $f$  è misurabile in  $E$  se la funzione

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in E, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \setminus E \end{cases}$$

è misurabile nel senso introdotto sopra. In questo caso si pone

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{R}^N} \tilde{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (\text{A.8})$$

se e solo se  $\tilde{f}$  è integrabile in  $\mathbf{R}^N$  (o non negativa).

La definizione in Sottosezione A.2.3 può essere applicata anche alle funzioni il cui integrale era stato già calcolato in Sottosezione A.2.1 o A.2.2; si ottiene un integrale che coincide con quello già definito. In modo analogo, l'integrale di Lebesgue di funzioni continue su compatti regolari coincide con quello di Riemann. Le funzioni continue a tratti risultano integrabili su intervalli limitati, e il loro integrale coincide con quello usuale.

ESEMPIO A.8. La funzione  $f$  dell'Esempio A.7 è integrabile in  $[0, 1]$ : se  $\varphi_n$  è come nell'Esempio A.7, si ha

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)\chi_{[0,1]} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^2 \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

□

OSSERVAZIONE A.9. Una funzione il cui integrale risulti definito in uno dei casi precedenti si dice *integrabile in  $\mathbf{R}^N$* , se il suo integrale è finito. Alcune funzioni non negative (non integrabili) hanno in effetti integrale infinito. □

L'integrale di Lebesgue soddisfa le usuali proprietà dell'integrale, se ristretto alle funzioni integrabili, cioè di integrale finito. Per esempio la somma di funzioni integrabili è integrabile, ed il suo integrale coincide con la somma degli integrali delle singole funzioni. In particolare vale la proprietà del confronto, e dunque, per ogni  $f, g$  ed  $E$  misurabili, con  $f \leq g$  q.o. in  $E$ ,

$$\int_E f \leq \int_E g. \quad (\text{A.9})$$

Ne segue

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|. \quad (\text{A.10})$$

Si può anche dimostrare che se  $E_1, E_2$  sono misurabili con  $E_1 \cap E_2$  di misura nulla, e  $f$  è integrabile su  $E_1 \cup E_2$ , allora  $f$  è integrabile su ciascun  $E_i$ , e

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{E_1} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{E_2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (\text{A.11})$$

È facile vedere che l'integrale di qualunque funzione su un insieme di misura nulla vale zero. In altri termini, se una funzione si annulla q.o. nel dominio di integrazione, il suo integrale è nullo. In particolare se  $f = g$  q.o. in  $E$ , allora

$$\int_E |f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = 0$$

(e in effetti vale anche il viceversa).

Un'altra conseguenza di questo fatto è che non è di solito necessario distinguere tra l'integrale calcolato su  $[a, b]$  e quello calcolato su  $(a, b)$ . Entrambi si denotano con il medesimo simbolo  $\int_a^b$ . Si scrive anche

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{\mathbf{R}}, \quad \int_a^{\infty} = \int_{(a, \infty)}, \quad \text{e così via.}$$

ESEMPIO A.10. FUNZIONI CONTINUE E LIMITATE SU INSIEMI ILLIMITATI. Per queste  $f$ , se sono non negative su  $E$  illimitato, basta calcolare

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f(\mathbf{x}) \chi_{\{|\mathbf{x}| \leq k\}} \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E \cap \{|\mathbf{x}| \leq k\}} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}; \quad (\text{A.12})$$

spesso la successione di integrali a destra è calcolabile con le solite procedure degli integrali di Riemann.

Sia per esempio per  $\alpha \in \mathbf{R}$  fissato,

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in E = [1, \infty).$$

Allora,

$$\int_1^k \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{k^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1; \quad \int_1^k \frac{dx}{x} = \ln k.$$

Quindi, mandando  $k$  a  $\infty$ ,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Se  $f$  cambia di segno in  $E$ , prima ci si accerta (usando (A.12)) che  $|f|$  sia integrabile in  $E$ . Poi si calcola l'integrale di  $f$  usando di nuovo la (A.12). Quest'ultima formula non è applicabile a funzioni non integrabili di segno variabile.  $\square$

ESEMPIO A.11. FUNZIONI ILLIMITATE SU LIMITATI. Se  $f \geq 0$  su  $E$  limitato basta calcolare

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \min(k, f(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x}. \quad (\text{A.13})$$

Per esempio consideriamo per  $\alpha \in \mathbf{R}$  fissato

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in E = (0, 1).$$

Allora se  $\alpha \neq 1$ ,  $\alpha > 0$ ,

$$\int_0^1 \min\left(k, \frac{1}{x^\alpha}\right) dx = \int_0^{k^{-1/\alpha}} k \, dx + \int_{k^{-1/\alpha}}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = k^{1-\frac{1}{\alpha}} + \frac{1 - k^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\alpha}.$$

Nello stesso modo

$$\int_0^1 \min\left(k, \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^{k^{-1}} k \, dx + \int_{k^{-1}}^1 \frac{dx}{x} = 1 - \ln \frac{1}{k} = 1 + \ln k.$$

Perciò (il caso  $\alpha \leq 0$  si riduce all'integrale di una funzione continua), per  $k \rightarrow \infty$  si ha

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

Se  $f$  cambia di segno, *dopo aver accertato che  $|f|$  è integrabile in  $E$* , si può calcolare

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \max(-k, \min(k, f(\mathbf{x}))) \, d\mathbf{x}.$$

□

OSSERVAZIONE A.12. Quanto detto sopra si può estendere a funzioni complesse  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{C}$ , considerando ciascuna delle funzioni reali  $\operatorname{Re} f$  e  $\operatorname{Im} f$ ; si pone poi

$$\int_E f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} := \int_E \operatorname{Re} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + i \int_E \operatorname{Im} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

se *entrambe*  $\operatorname{Re} f$  e  $\operatorname{Im} f$  sono integrabili in  $E$ . □

Altri risultati importanti sono:

LEMMA A.13. *Se  $f$  è integrabile su  $\mathbf{R}$ , esistono due successioni  $c_n^+ \rightarrow \infty$ ,  $c_n^- \rightarrow -\infty$ , tali che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{c_n^+}^{\infty} f(x) \, dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{c_n^-} f(x) \, dx = 0. \quad (\text{A.14})$$

LEMMA A.14. *Se  $f$  è integrabile su  $[a, \infty)$ , allora*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_m^{\infty} f(x) \, dx = 0. \quad (\text{A.15})$$

LEMMA A.15. *Se  $f_n$  e  $f$  sono funzioni misurabili su un insieme limitato  $E$ , e se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad |f(x)|, |f_n(x)| \leq C, \quad \text{q.o. in } E,$$

*con  $C$  indipendente da  $x$ , allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

LEMMA A.16. *Se  $f$  è una funzione integrabile su  $(a, b)$ , allora, posto*

$$F(x) = \int_a^x f(s) \, ds, \quad a < x < b,$$

*la  $F$  risulta continua in  $(a, b)$ , e la sua derivata  $F'$  esiste q.o., con  $F' = f$  q.o.. In particolare, se due funzioni integrabili  $f$  e  $g$  in  $(a, b)$  soddisfano*

$$\int_a^x f(s) \, ds = \int_a^x g(s) \, ds, \quad a < x < b,$$

*vale  $f = g$  q.o. in  $(a, b)$ .*

**A.3. Lo spazio  $L^2(E)$** 

Consideriamo le funzioni misurabili in  $E \subset \mathbf{R}^N$  che abbiano la proprietà

$$f^2 \text{ è integrabile su } E. \quad (\text{A.16})$$

Per i motivi che sono chiariti nel Capitolo 7, tra due qualsiasi di queste funzioni  $f$  e  $g$  vogliamo introdurre una ‘distanza’ (o norma di  $f - g$ )

$$\|f - g\| := \left( \int_E |f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Come già osservato, questa quantità risulta nulla se  $f = g$  q.o.. Dunque vogliamo in realtà identificare due funzioni che sono uguali quasi ovunque. In modo rigoroso, questo si ottiene considerando l’insieme delle *classi di equivalenza*

$$[f] = \{g \mid g = f \text{ q.o.}\},$$

per ogni  $f$  come sopra. Lo spazio  $L^2(E)$  dunque è definito come l’insieme di queste classi di equivalenza, e, per esempio, si definisce

$$\|[f]\| = \left( \int_E f(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Con le operazioni

$$\lambda_1[f_1] + \lambda_2[f_2] := [\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2], \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R},$$

$L^2(E)$  risulta uno spazio vettoriale.

Di solito, tuttavia, si lavora in termini delle funzioni  $f$ , ossia si sceglie (ad arbitrio) un rappresentante della classe  $[f]$ .

**A.3.1. Proprietà di successioni di funzioni in  $L^2(E)$ .** Lo spazio  $L^2(E)$  risulta uno spazio *completo* con la norma  $\|\cdot\|$ . Questo significa che una successione di Cauchy in  $L^2(E)$  ha limite in  $L^2(E)$ . Più in dettaglio: se la successione  $\{f_n\} \subset L^2(E)$  soddisfa

$$\begin{aligned} &\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste un } n_\varepsilon \text{ tale che: } \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \\ &\text{per ogni } n, m \geq n_\varepsilon, \end{aligned}$$

allora esiste un  $f \in L^2(E)$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0. \quad (\text{A.17})$$

Per definizione, se vale la (A.17) si dice che  $f_n$  converge a  $f$  in  $L^2(E)$ . Si vede subito che se vale (A.17) allora la  $\{f_n\}$  è di Cauchy. Inoltre, ricordando la (7.9), dalla (A.17) segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = \|f\|. \quad (\text{A.18})$$

Un’altra proprietà interessante è:

Data una successione  $f_n$  che converge a  $f$  in  $L^2(E)$ ,  
se ne può estrarre una sottosuccessione  $f_{n_k}$  che  
converge a  $f$  q.o. in  $E$ .

Non è vero però, in genere, che *tutta* la successione  $f_n$  converga a  $f$  q.o.: la convergenza in  $L^2(E)$  significa che una certa successione di integrali diventa piccola, ma i grafici delle  $f_n$  possono comunque essere distanti da quello della  $f$  (almeno in insiemi piccoli).

ESEMPIO A.17. Si consideri infatti il seguente controesempio: sia  $E = [0, 1]$ ; si prendano i due intervalli  $I_1 = [0, 1/2)$  e  $I_2 = [1/2, 1]$ ; poi i quattro  $I_3 = [0, 1/4)$ ,  $I_4 = [1/4, 1/2)$ ,  $I_5 = [1/2, 3/4)$ ,  $I_6 = [3/4, 1]$ , poi gli otto  $I_7 = [0, 1/8)$ ,  $I_8 = [1/8, 1/4)$ ,  $\dots$ , e così via. Si ponga  $f_n = \chi_{I_n}$ . Poiché

$$\int_E |f_n(x)|^2 dx = \int_0^1 \chi_{I_n}(x) dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

vale che  $f_n$  tende a zero in  $L^2(E)$ . Considerazioni abbastanza semplici, però, mostrano che  $f_n(x)$  non tende a zero per alcun  $x \in E$ .  $\square$

Comunque, se una successione converge sia nel senso di  $L^2$  che in quello q.o., allora i due limiti devono coincidere (questo segue per esempio dalla proprietà descritta sopra).

Un concetto molto importante è quello della *convergenza debole*: si dice che una successione  $\{f_n\} \subset L^2(E)$  converge in modo debole in  $L^2(E)$  a una funzione  $f \in L^2(E)$  se e solo se, per ogni fissata  $g \in L^2(E)$ , vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (\text{A.19})$$

Nella Sottosezione 7.3.1 si discute un esempio di successione che converge nel senso debole, ma non nel senso di (A.17). Viceversa, una successione che converge a  $f$  nel senso di (A.17), vi converge anche nel senso debole.

Una proprietà notevole è la seguente:

Data una successione  $\{f_n\}$  di funzioni con norma limitata uniformemente, cioè tali che

$$\|f_n\| \leq C, \quad \text{per ogni } n \geq 1$$

(ove  $C$  non dipende da  $n$ ), se ne può estrarre una sottosuccessione  $\{f_{n_k}\}$  che converge nel senso debole.

## Cambiamenti di coordinate

### B.1. Coordinate cilindriche

Quanto detto in questa sezione vale anche per le coordinate polari nel piano, qualora si prescinda dalla dipendenza da  $z$ .

Le coordinate cilindriche in  $\mathbf{R}^3$  sono definite da

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z; \end{cases} \quad 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty < z < \infty.$$

Lo iacobiano del cambiamento di coordinate vale

$$J(r, \varphi, z) = r. \quad (\text{B.1})$$

La terna ortonormale dei versori associati alle coordinate cilindriche è

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, & \text{versore radiale;} \\ \mathbf{u}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2, & \text{versore tangenziale;} \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_3, & \text{versore assiale.} \end{cases}$$

**B.1.1. Gradiente in coordinate cilindriche.** Dalle usuali formule di derivazione di funzioni composte discende

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Nello stesso modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Perciò, per una funzione  $f$ , che qui e nel seguito assumeremo regolare quanto basta,

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_3 \\ &= \cos \varphi \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_1 - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_2 + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_3. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Questa è la decomposizione del gradiente di  $f$  nella terna  $\mathbf{u}_i$ . Si deve assumere  $r > 0$ , che comunque è un'ipotesi necessaria perché la trasformazione di coordinate sia regolare.

**B.1.2. Divergenza in coordinate cilindriche.** Sia  $\mathbf{F}$  una funzione vettoriale regolare quanto basta, e poniamo

$$\mathbf{F} = F^1 \mathbf{e}_1 + F^2 \mathbf{e}_2 + F^3 \mathbf{e}_3 = F^r \mathbf{u}_1 + F^\varphi \mathbf{u}_2 + F^z \mathbf{u}_3.$$

Ricordando la definizione degli  $\mathbf{u}_i$  segue

$$\begin{aligned} F^r &= \cos \varphi F^1 + \sin \varphi F^2, \\ F^\varphi &= -\sin \varphi F^1 + \cos \varphi F^2, \\ F^z &= F^3. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \\ &= \cos \varphi \frac{\partial F^1}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial F^1}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial F^2}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial F^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial F^3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial F^r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} F^r + \frac{\partial F^z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F^r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F^z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

**B.1.3. Laplaciano in coordinate cilindriche.** Per definizione di laplaciano, e per (B.2), (B.3),

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{u}_3 \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Talvolta è utile il seguente

LEMMA B.1. *Sia  $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$  a simmetria radiale, ossia*

$$f(x, y) = g(r), \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2. \quad (\text{B.5})$$

*Allora l'origine è un punto critico per  $f$ , ossia*

$$\nabla f(0, 0) = 0, \quad (\text{B.6})$$

*e dunque  $g'(0+) = 0$ .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la restrizione di  $f$  all'asse  $x$ ,  $h(x) = f(x, 0)$ . Allora, questa funzione di  $x$  è pari in  $x$ , poiché

$$h(x) = f(x, 0) = g(|x|) = f(-x, 0) = h(-x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dunque si deve avere

$$f_x(0, 0) = h'(0) = 0.$$

In modo simile si dimostra che  $f_y(0, 0) = 0$ . □

## B.2. Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche in  $\mathbf{R}^3$  sono definite da

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta; \end{cases} \quad 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Si calcola subito lo iacobiano del cambiamento di coordinate

$$J(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \theta. \quad (\text{B.7})$$

Consideriamo poi la terna ortonormale associata alle coordinate sferiche

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \cos \varphi \sin \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3, & \text{versore radiale;} \\ \mathbf{u}_2 = -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2, & \text{versore tangenziale;} \\ \mathbf{u}_3 = \cos \varphi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \cos \theta \mathbf{e}_2 - \sin \theta \mathbf{e}_3, & \text{versore meridiano.} \end{cases}$$

**B.2.1. Gradiente in coordinate sferiche.** Vogliamo scomporre il gradiente di una funzione  $f$  secondo la terna  $\mathbf{u}_i$ . Invece di procedere usando la regola di derivazione di funzioni composte, usiamo la proprietà del gradiente  $\nabla f$

$$f(P_1) - f(P_2) = \int_{\mathcal{C}} \nabla f \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds, \quad (\text{B.8})$$

ove la curva  $\mathcal{C}$  congiunge  $P_2$  a  $P_1$ , e  $\boldsymbol{\tau}$  ne è il versore tangente.

Scegliamo prima, per calcolare la componente di  $\nabla f$  lungo  $\mathbf{u}_1$ ,  $\mathcal{C}$  come un segmento di raggio

$$\mathcal{C}(s) = ((r+s) \cos \varphi \sin \theta, (r+s) \sin \varphi \sin \theta, (r+s) \cos \theta), \quad 0 \leq s \leq h.$$

Dunque, usando il simbolo  $f(r, \varphi, \theta)$  per denotare la dipendenza dalle coordinate sferiche,

$$f(r+h, \varphi, \theta) - f(r, \varphi, \theta) = \int_0^h \nabla f(r+s, \varphi, \theta) \cdot \mathbf{u}_1(\varphi, \theta) \, ds.$$

Dividendo per  $h$  e prendendo il limite per  $h \rightarrow 0$  si ottiene

$$\nabla f \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Prendiamo poi  $\mathcal{C}$  come un arco di parallelo, ossia

$$\mathcal{C}(\omega) = (r \cos(\varphi + \omega) \sin \theta, r \sin(\varphi + \omega) \sin \theta, r \cos \theta), \quad 0 \leq \omega \leq h.$$

In questo modo il vettore tangente a  $\mathcal{C}$  è proprio  $r \sin \theta \mathbf{u}_2$ . Allora

$$f(r, \varphi+h, \theta) - f(r, \varphi, \theta) = r \sin \theta \int_0^h \nabla f(r, \varphi + \omega, \theta) \cdot \mathbf{u}_2(\varphi + \omega, \theta) \, d\omega.$$

Dividendo per  $h$  e prendendo il limite per  $h \rightarrow 0$  si ottiene

$$\nabla f \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}.$$

Questa espressione ha senso per  $r \sin \theta \neq 0$ , ma sappiamo del resto che in caso contrario il cambiamento di coordinate presenta delle singolarità (per esempio lo iacobiano si annulla).

Infine si scelga

$$\mathcal{C}(\omega) = (r \cos \varphi \sin(\theta + \omega), r \sin \varphi \sin(\theta + \omega), r \cos(\theta + \omega)), \quad 0 \leq \omega \leq h,$$

in modo che  $\mathcal{C}$  risulti un arco di meridiano e il suo vettore tangente sia  $r\mathbf{u}_3$ . Quindi

$$f(r, \varphi, \theta + h) - f(r, \varphi, \theta) = r \int_0^h \nabla f(r, \varphi, \theta + \omega) \cdot \mathbf{u}_3(\varphi, \theta + \omega) d\omega,$$

e si ottiene nel solito modo

$$\nabla f \cdot \mathbf{u}_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Riassumendo

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_3. \quad (\text{B.9})$$

**B.2.2. Divergenza in coordinate sferiche.** Usiamo la proprietà (teorema della divergenza)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma, \quad (\text{B.10})$$

ove  $\Omega$  è un qualunque aperto limitato con frontiera regolare, e  $\boldsymbol{\nu}$  è la normale esterna a tale frontiera. Usiamo nel seguito la scomposizione di  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = F^r \mathbf{u}_1 + F^\varphi \mathbf{u}_2 + F^\theta \mathbf{u}_3. \quad (\text{B.11})$$

Prendiamo

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \bar{r} \leq r \leq \bar{r} + h_r, \bar{\varphi} \leq \varphi \leq \bar{\varphi} + h_\varphi, \bar{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta} + h_\theta\},$$

con  $(\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta})$  fissato ad arbitrio, e  $h_r, h_\varphi, h_\theta > 0$  piccoli. Riscrivendo (B.10) in coordinate sferiche, si ottiene

$$\int_{\bar{r}}^{\bar{r}+h_r} \int_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}+h_\varphi} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}+h_\theta} \operatorname{div} \mathbf{F} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = I^r + I^\varphi + I^\theta, \quad (\text{B.12})$$

ove

$$I^r = \int_{\partial\Omega \cap \{r=\bar{r}+h_r\}} F^r d\sigma - \int_{\partial\Omega \cap \{r=\bar{r}\}} F^r d\sigma,$$

e  $I^\varphi$ , rispettivamente  $I^\theta$ , è definito in modo analogo, scambiando  $r$  con  $\varphi$ , rispettivamente con  $\theta$ . Infatti la frontiera di  $\Omega$ , per la definizione di  $\Omega$ , risulta composta da porzioni di superficie regolari, e su ciascuna porzione una delle coordinate sferiche è costante; dunque la normale a tale porzione di frontiera è uno dei vettori  $\mathbf{u}_i$ . Raccogliendo gli integrali sulle due porzioni ove risulta costante la stessa coordinata (per esempio la  $r$  nel caso di  $I^r$ ) si ottengono appunto  $I^r, I^\varphi, I^\theta$ .

Calcoliamo (ricordando che le porzioni di frontiera ove  $r = \text{costante}$  sono porzioni di superficie sferica, con elemento d'area  $r^2 \sin \theta$ ) quando gli

incrementi  $h_i$  tendono a zero,

$$\begin{aligned} & \frac{I^r}{h_r h_\varphi h_\theta} \\ &= \frac{1}{h_r h_\varphi h_\theta} \int_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}+h_\varphi} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}+h_\theta} [F^r(\bar{r}+h_r, \varphi, \theta)(\bar{r}+h)^2 \sin \theta - F^r(\bar{r}, \varphi, \theta)\bar{r}^2 \sin \theta] d\varphi d\theta \\ & \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( F^r(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta \right) (\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

Con un argomento analogo (ricordando che le porzioni di frontiera ove  $\varphi =$  costante sono porzioni di piano, con elemento d'area  $r$ )

$$\begin{aligned} \frac{I^\varphi}{h_r h_\varphi h_\theta} &= \frac{1}{h_r h_\varphi h_\theta} \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+h_r} \int_{\bar{\theta}}^{\bar{\theta}+h_\theta} [F^\varphi(r, \bar{\varphi}+h_\varphi, \theta)r - F^\varphi(r, \bar{\varphi}, \theta)r] dr d\theta \\ & \rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( F^\varphi(r, \varphi, \theta)r \right) (\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

Infine (ricordando che le porzioni di frontiera ove  $\theta =$  costante sono porzioni di superficie conica, con elemento d'area  $r \sin \theta$ )

$$\begin{aligned} & \frac{I^\theta}{h_r h_\varphi h_\theta} \\ &= \frac{1}{h_r h_\varphi h_\theta} \int_{\bar{r}}^{\bar{r}+h_r} \int_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}+h_\varphi} [F^\theta(r, \varphi, \bar{\theta}+h_\theta)r \sin(\bar{\theta}+h_\theta) - F^\theta(r, \varphi, \bar{\theta})r \sin \bar{\theta}] dr d\varphi \\ & \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left( F^\theta(r, \varphi, \theta)r \sin \theta \right) (\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

D'altra parte, il termine di sinistra di (B.12), se diviso per  $h_r h_\varphi h_\theta$ , ha limite, quando ciascuno degli incrementi tende a zero,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \bar{r}^2 \sin \bar{\theta}.$$

Utilizzando tutte le uguaglianze sopra, si ottiene infine la rappresentazione cercata di  $\operatorname{div} \mathbf{F}$ , ossia

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (F^r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F^\varphi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F^\theta \sin \theta). \quad (\text{B.13})$$

**B.2.3. Laplaciano in coordinate sferiche.** Per definizione di laplaciano, e per (B.9), (B.13),

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_1 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_3 \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} \sin \theta \right). \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$



## APPENDICE C

### Richiami e definizioni

#### C.1. Funzioni

DEFINIZIONE C.1. Sia  $[a, b]$  un intervallo limitato e chiuso di  $\mathbf{R}$ . Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  si dice *continua a tratti* su  $[a, b]$  se e solo se esiste una partizione di  $[a, b]$ ,  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ , tale che:  $f$  è continua su  $(x_i, x_{i+1})$  per  $i = 0, \dots, n-1$ ; esistono finiti i limiti  $f(x_i+)$  per  $i = 0, \dots, n-1$ ; esistono finiti i limiti  $f(x_i-)$  per  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

DEFINIZIONE C.2. Sia  $I$  un intervallo illimitato e chiuso di  $\mathbf{R}$ . Una funzione  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  si dice *continua a tratti* su  $I$  se e solo se è continua a tratti su ogni intervallo limitato e chiuso  $J$  contenuto in  $I$ .  $\square$

#### C.2. Insiemi

DEFINIZIONE C.3. Una curva  $\gamma \subset \mathbf{R}^N$  si dice *regolare* se ha una parametrizzazione  $\Psi : I \rightarrow \mathbf{R}^N$ , con  $I$  intervallo di  $\mathbf{R}$ , tale che  $\Psi \in C^1(\mathbf{R})$ , e  $\dot{\Psi}(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ . La parametrizzazione  $\Psi$  si dice a sua volta *regolare*.

Una curva regolare si dice *semplice* se  $\Psi(t_1) \neq \Psi(t_2)$  per ogni  $t_1, t_2 \in I$  con  $t_1 \neq t_2$ .  $\square$

DEFINIZIONE C.4. Un insieme aperto  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  si dice *connesso* se ogni coppia di punti  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$  può essere congiunta da una curva regolare  $\gamma \subset \Omega$ .  $\square$

Di solito la proprietà precedente viene introdotta come connessione per archi; comunque per insiemi aperti di  $\mathbf{R}^N$  essa equivale alla connessione, che per un insieme  $E \subset \mathbf{R}^N$  qualunque viene introdotta spesso come

DEFINIZIONE C.5. Un insieme  $E \subset \mathbf{R}^N$  si dice *connesso* se da

$$E = E_1 \cup E_2, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_i = E \cap A_i, \quad A_i \text{ aperto,}$$

segue che vale almeno una delle due

$$E_1 = \emptyset, \quad E_2 = \emptyset.$$

$\square$

DEFINIZIONE C.6. Un insieme aperto  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  si dice *normale* rispetto a una retta  $\ell$  se la sua intersezione con ogni retta ortogonale a  $\ell$  è connessa, ossia è un intervallo.  $\square$

#### C.3. Identità trigonometriche

- L'identità

$$1 + 2 \sum_{n=1}^k \cos(n\theta) = \frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad \theta \neq 2m\pi, \quad m \in \mathbf{Z} \quad (\text{C.1})$$

proviene dalla parte reale della somma parziale della serie geometrica

$$\sum_{n=0}^k e^{in\theta} = \frac{e^{i(k+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}, \quad (\text{C.2})$$

dopo l'applicazione di formule trigonometriche elementari.

- L'identità

$$\sum_{n=0}^k \sin(2n+1)\theta = \frac{\sin^2(k+1)\theta}{\sin\theta}, \quad \theta \neq m\pi, m \in \mathbf{Z}, \quad (\text{C.3})$$

segue dalla somma su  $n = 0, 1, \dots, k$ , delle

$$2 \sin(2n+1)\theta \sin\theta = \cos(2n\theta) - \cos 2(n+1)\theta,$$

che a loro volta sono conseguenze immediate delle formule di addizione.

#### C.4. Disuguaglianze

LEMMA C.7. CAUCHY-SCHWARZ. Se  $f, g \in L^2(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |g(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{C.4})$$

La dimostrazione è data nel Lemma 7.3.

LEMMA C.8. POINCARÉ. Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbf{R}^N$ , contenuto in una sfera di raggio  $R$ . Sia  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ , con  $u = 0$  su  $\partial\Omega$ . Allora

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x})^2 \, d\mathbf{x} \leq (2R)^2 \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x}. \quad (\text{C.5})$$

DIMOSTRAZIONE. Svolgiamo per semplicità la dimostrazione in  $\mathbf{R}^2$ ; il caso generale è del tutto analogo. Supponiamo anche senza perdita di generalità che la sfera che contiene  $\Omega$  abbia centro nell'origine.

Estendiamo la definizione di  $u$  a tutto  $\mathbf{R}^2$ , ponendo  $u \equiv 0$  fuori di  $\overline{\Omega}$ . Continuiamo a denotare con  $u$  questa estensione.

Fissiamo  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ . Integriamo  $u_y$  sulla semiretta per  $(\bar{x}, \bar{y})$  parallela all'asse  $y$ , per  $y < \bar{y}$ ; definiamo  $\bar{\eta} < \bar{y}$  in modo che  $(\bar{x}, \bar{\eta}) \in \partial\Omega$  sia l'intersezione di questa semiretta con  $\partial\Omega$  più vicina a  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Per la regolarità di  $u$ , e visto che  $u(\bar{x}, \bar{\eta}) = 0$ ,

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \int_{\bar{\eta}}^{\bar{y}} u_y(\bar{x}, y) \, dy,$$

da cui, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (C.4),

$$u(\bar{x}, \bar{y})^2 = \left( \int_{\bar{\eta}}^{\bar{y}} u_y(\bar{x}, y) \, dy \right)^2 \leq (\bar{y} - \bar{\eta}) \int_{\bar{\eta}}^{\bar{y}} u_y(\bar{x}, y)^2 \, dy \leq 2R \int_{-R}^R u_y(\bar{x}, y)^2 \, dy.$$

Integriamo questa disuguaglianza su  $\Omega$ : dato che  $u \equiv 0$  fuori di  $\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(\bar{x}, \bar{y})^2 d\bar{x} d\bar{y} &\leq 2R \int_{\Omega} \left( \int_{-R}^R u_y(\bar{x}, y)^2 dy \right) d\bar{x} d\bar{y} \\ &= 2R \int_{-R}^R \left[ \int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R u_y(\bar{x}, y)^2 dy \right) d\bar{x} \right] d\bar{y} \\ &= (2R)^2 \int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R u_y(\bar{x}, y)^2 dy \right) d\bar{x} = (2R)^2 \int_{\Omega} u_y(\bar{x}, y)^2 d\bar{x} dy. \end{aligned}$$

□

### C.5. Riflessioni

Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ , con  $a, b \in \mathbf{R}$ . Vogliamo trovare un'estensione  $F$  di  $f$  che sia pari intorno a  $x = a$ , dispari intorno a  $x = b$ , e definita su tutto  $\mathbf{R}$  (al di fuori dell'insieme  $I$  definito sotto). Iniziamo con il costruire l'estensione sull'intervallo 'riflesso a destra'  $(a, 2b - a)$ , ponendo

$$F_1(x) = \begin{cases} f(x), & a < x < b, \\ -f(2b - x), & b < x < 2b - a. \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Poi estendiamo la definizione a  $(3a - 2b, 2b - a)$  mediante la

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x), & a < x < 2b - a, \\ F_1(2a - x), & 3a - 2b < x < a. \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

La  $F$  soddisfa la proprietà di simmetria richieste *entro* l'intervallo  $(3a - 2b, 2b - a)$ , che ha lunghezza  $4(b - a)$ . Si noti che  $F$  non risulta definita sui punti traslati di  $a$  e  $b$  di multipli interi di  $b - a$ , ossia sull'insieme

$$I = \{x \in \mathbf{R} \mid x = a + k(b - a), \quad \text{o} \quad x = b + k(b - a), k \in \mathbf{Z}\}.$$

Questo non ha in genere importanza nelle applicazioni del seguente risultato.

**LEMMA C.9.** *La  $F : \mathbf{R} \setminus I \rightarrow \mathbf{R}$  costruita in (C.7), e poi estesa come funzione periodica di periodo  $4(b - a)$  è l'unica estensione di  $f$  con le proprietà richieste.*

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo che la  $F$  ha le proprietà di simmetria indicate, e in particolare che è dispari intorno a  $x = b$ . Siano  $x_1$  e  $x_2 \in \mathbf{R} \setminus I$ , tali che

$$b - x_1 = x_2 - b > 0. \quad (\text{C.8})$$

Dobbiamo mostrare che  $F(x_1) = -F(x_2)$ . Risultano determinati in modo univoco  $n, m \in \mathbf{Z}$  tali che

$$\begin{aligned} 3a - 2b + 4n(b - a) &< x_1 < 2b - a + 4n(b - a), \\ 3a - 2b + 4m(b - a) &< x_2 < 2b - a + 4m(b - a). \end{aligned}$$

Queste si possono scrivere come

$$\begin{aligned} (-4n + 3)(b - a) &> b - x_1 > -(4n + 1)(b - a), \\ (4m + 1)(b - a) &> x_2 - b > (4m - 3)(b - a). \end{aligned}$$

Ne segue per (C.8) che  $m \geq 0$ ,  $n \leq 0$  e

$$\frac{3}{2} > m - |n| > -\frac{2}{3}, \quad \text{ossia che o } m = |n| \text{ o } m = |n| + 1.$$

Poniamo

$$\xi_1 = x_1 - 4n(b - a), \quad \xi_2 = x_2 - 4m(b - a).$$

Risultano  $\xi_1, \xi_2 \in (3a - 2b, 2b - a)$ . Per la periodicità di  $F$  basta far vedere che

$$F(\xi_1) = -F(\xi_2). \quad (\text{C.9})$$

i) Caso  $m = |n| = -n$ . Vale

$$b - \xi_1 = b - x_1 + 4n(b - a) = x_2 - b - 4m(b - a) = \xi_2 - b.$$

Quindi  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono simmetrici rispetto a  $x = b$ . Poiché  $F$  è per costruzione dispari intorno a  $x = b$  all'interno di  $(3a - 2b, 2b - a)$ , la (C.9) è dimostrata.

ii) Caso  $m = |n| + 1 = -n + 1$ . Vale

$$2a - b - \xi_1 = 2a - 2b + b - x_1 + 4n(b - a) = \xi_2 - (2a - b).$$

Quindi  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono simmetrici rispetto a  $x = 2a - b$ . Poiché  $F$  è per costruzione dispari intorno a  $x = 2a - b$  all'interno di  $(3a - 2b, 2b - a)$ , la (C.9) è dimostrata anche in questo caso.

In modo analogo si mostra che  $F$  è pari intorno a  $x = a$ .

Resta da dimostrare l'unicità dell'estensione  $F$ . Come primo passo, osserviamo che l'unicità è ovvia su  $(b, 2b - a)$ , per riflessione dispari intorno a  $x = b$ . Riflettendo poi in modo pari intorno a  $x = a$ , segue l'unicità su  $(3a - 2b, a)$ . A questo punto, di nuovo per riflessione dispari intorno a  $x = b$ , l'unicità segue su  $(b, 4b - 3a)$ . Ripetendo il ragionamento, l'estensione viene identificata in modo univoco su tutto  $\mathbf{R} \setminus I$ , in una successione numerabile di passi.  $\square$

**OSSERVAZIONE C.10.** In modo simile si estende la  $f$  in modo che l'estensione abbia una qualunque prescelta coppia di simmetrie (pari o dispari) intorno a  $x = a$  e  $x = b$ .

Se le simmetrie in  $a$  e in  $b$  sono dello stesso tipo (entrambe pari o entrambe dispari), si può vedere che la funzione estesa risulta in effetti periodica con periodo  $2(b - a)$ .  $\square$

Risultano spesso utili le seguenti osservazioni di dimostrazione elementare.

**LEMMA C.11.** Sia  $f \in C([0, b])$ . Denotiamo con  $f_D$  [ $f_P$ ] la riflessione dispari [pari] di  $f$  intorno a  $x = 0$ . Allora:

- (1) La  $f_D$  è in  $C([-b, b])$  se e solo se  $f(0) = 0$ .
- (2) Se  $f \in C^1([0, b])$ , e  $f(0) = 0$ , allora  $f_D \in C^1([-b, b])$ .
- (3) Sia  $f \in C^2([0, b])$ , e  $f(0) = 0$ . Allora  $f_D \in C^2([-b, b])$  se e solo se  $f''(0) = 0$ .

La riflessione pari soddisfa:

- (1) La  $f_P$  è in  $C([-b, b])$ .
- (2) Sia  $f \in C^1([0, b])$ . Allora  $f_P \in C^1([0, b])$  se e solo se  $f'(0) = 0$ .
- (3) Sia  $f \in C^2([0, b])$ , e  $f'(0) = 0$ . Allora  $f_P \in C^2([-b, b])$ .

### C.6. Integrali

LEMMA C.12. Per ogni  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  integrabile su  $(0, T)$  e periodica di periodo  $T > 0$ , vale

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx, \quad \text{per ogni } a \in \mathbf{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti,

$$\int_a^{a+T} f - \int_0^T f = - \int_0^a f + \int_T^{a+T} f = 0,$$

perché, cambiando variabile,

$$\int_T^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^a f(y+T) \, dy = \int_0^a f(y) \, dy,$$

per l'ipotesi di periodicità.  $\square$

LEMMA C.13. Siano  $f \in C^1([1, \infty))$ ,  $g \in C([1, \infty))$  due funzioni tali che

$$f'(x) \leq 0, \quad x \geq 1; \quad f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (\text{C.10})$$

e

$$\left| \int_a^b g(x) \, dx \right| \leq C, \quad \text{per ogni } a, b \geq 1, \quad (\text{C.11})$$

con  $C$  indipendente da  $a$  e  $b$ .

Allora

$$Y(s) := \int_1^s f(x)g(x) \, dx \rightarrow L, \quad s \rightarrow \infty,$$

per un numero reale opportuno  $L$ .

Si noti che il Lemma C.13 vale a prescindere dalla sommabilità della funzione  $fg$  su  $[1, \infty)$ : si veda l'Osservazione 8.6 per un esempio.

DIMOSTRAZIONE. Per il criterio di Cauchy, basta dimostrare che per ogni fissato  $\varepsilon > 0$  esiste un  $h_0 > 1$  opportuno tale che

$$|Y(k) - Y(h)| \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } h, k \geq h_0. \quad (\text{C.12})$$

Si ha

$$Y(k) - Y(h) = \int_h^k f(x)g(x) \, dx = f(k)G(k) - f(h)G(h) - \int_h^k f'(x)G(x) \, dx,$$

ove si è definito

$$G(x) = \int_1^x g(s) \, ds.$$

È ovvio che

$$f(k)G(k), f(h)G(h) \rightarrow 0, \quad h, k \rightarrow \infty,$$

perché  $f$  ha limite nullo e  $G$  resta limitata per ipotesi. Inoltre

$$\begin{aligned} \left| \int_h^k f'(x)G(x) \, dx \right| &\leq \int_h^k |f'(x)G(x)| \, dx \leq C \int_h^k |f'(x)| \, dx \\ &= -C \int_h^k f'(x) \, dx = C[f(h) - f(k)] \rightarrow 0, \quad h, k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

## APPENDICE D

### Simboli usati nel testo

$B_r(x)$	sfera con centro $x$ e raggio $r$ .
$x \rightarrow s_0+$	$x$ tende a $s_0$ da destra.
$x \rightarrow s_0-$	$x$ tende a $s_0$ da sinistra.
$f(s_0+)$	denota il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow s_0+$ .
$f(s_0-)$	denota il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow s_0-$ .
$s_+$	parte positiva di $s \in \mathbf{R}$ , $s_+ = \max(s, 0)$ .
$s_-$	parte negativa di $s \in \mathbf{R}$ , $s_- = \max(-s, 0)$ .
$\text{sign}(x)$	funzione segno di $x \in \mathbf{R}$ , definita da $\text{sign}(x) = x/ x $ , per $x \neq 0$ .
$\nabla f$	gradiente spaziale della funzione $f(\mathbf{x}, t)$ : $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N})$ .
$\mathbf{e}_k$	$k$ -esimo versore della base standard in $\mathbf{R}^N$ .
$f * g$	prodotto di convoluzione di $f$ e $g$ .
$C(A)$	classe delle funzioni continue in $A$ . Lo stesso che $C^0(A)$ .
$C^n(A)$	classe delle funzioni continue in $A$ insieme con le loro derivate fino all'ordine $n$ .
$C_0^n(A)$	classe delle funzioni in $C^n(A)$ , il cui supporto è compatto e contenuto in $A$ .
$C^{2,1}(A)$	classe delle funzioni $f$ , tali che $f$ , $\frac{\partial f}{\partial t}$ , $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ , e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sono continue in $A$ per ogni $i, j = 1, \dots, N$ .
$i$	unità immaginaria: $i \cdot i = -1$ .
$\chi_I$	funzione caratteristica dell'insieme $I$ : $\chi_I(x) = 1$ se $x \in I$ , $\chi_I(x) = 0$ se $x \notin I$ .
$f _B$	restrizione a $B \subset A$ di una funzione $f : A \rightarrow \mathbf{R}^N$ .
e.d.p.	equazione/equazioni a derivate parziali.
e.d.o.	equazione/equazioni a derivate ordinarie.
q.o.	quasi ovunque.

