EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI
ING. AEROSPAZIALE

prof. Daniele Andreucci

Prova tecnica del 12/1/2009

1. Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= Cu\,, & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,,\\ u(0,t) &= 0\,, & t > 0\,,\\ u_x\Big(\frac{\pi}{2}, t\Big) &= 0\,, & t > 0\,,\\ u(x,0) &= \cos x\,, & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \end{aligned}$$

ove D e C sono costanti positive.
Nel caso poi in cui sia $D = C$, si determini il limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

Soluzione

Cerchiamo uno sviluppo in serie di u della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t) \sin(2n+1)x\,.$$

Per $n \geq 0$ i coefficienti α_n saranno determinati dai problemi di Cauchy

$$\begin{aligned} \alpha_n' + D(2n+1)^2\alpha_n &= C\alpha_n\,,\\ \alpha_n(0) &= \gamma_n\,, \end{aligned}$$

ove per $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(2n+1)x \,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1-(-1)^n}{n}\Big]\,, \end{aligned}$$

mentre

$$\gamma_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\,.$$

Quindi, dalla formula risolutiva delle e.d.o. lineari del primo ordine si ha per ogni $n \geq 0$:

$$\alpha_n(t) = \gamma_n e^{[C - D(2n+1)^2]t}\,, \qquad 0 < t < \infty\,.$$

Se $D = C$, vista la convergenza della serie per $t \geq 1$, e poiché i coefficienti α_n, per $n \geq 1$, tendono a 0, con rapidità esponenziale, si ha infine

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \alpha_0(t) \sin x = \gamma_0 \sin x \,.$$

R. *La soluzione è data da*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{[C - D(2n+1)^2]t} \sin(2n+1)x \,,$$

ove

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1+(-1)^n}{n+1} + \frac{1-(-1)^n}{n}\Big] \,, \qquad && n \geq 1 \,, \\ \gamma_0 &= \frac{2}{\pi} \,, && n = 0 \,, \end{aligned}$$

Segue che, se $D = C$,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sin x \,.$$

2. Una funzione $u \in C^2(\boldsymbol{R}^2)$ soddisfa

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \,, \qquad && \text{in } \boldsymbol{R}^2, \\ u(ct,t) &= 0 \,, && 0 \leq t \leq \frac{L}{c} \,, \\ u(L,t) &= 0 \,, && 0 \leq t \leq \frac{L}{c} \,, \end{aligned}$$

ove L, c sono costanti positive.
Determinare un aperto Ω di $\boldsymbol{R}^2$ ove $u \equiv 0$.
SOLUZIONE
Si sa che

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \,,$$

da cui si ottiene subito, per le condizioni assegnate,

$$\begin{aligned} f(0) + g(2ct) &= 0 \,, \\ f(L-ct) + g(L+ct) &= 0 \,, \end{aligned}$$

per $0 \leq t \leq L/c$.
Queste due condizioni possono essere riscritte (introducendo le nuove variabili $y = 2ct$ e $z = L - ct$) come

$$\begin{aligned} g(y) &= -f(0) \,, \qquad && 0 \leq y \leq 2L \,, \\ f(z) &= -g(2L-z) \,, && 0 \leq z \leq L \,. \end{aligned}$$

Si noti che queste uguaglianze valgono per ogni valore di y e z negli intervalli specificati. Dunque si avrà

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) = f(z) + g(y) = -g(2L-z) + g(y) = f(0) - f(0) = 0 \,,$$

ammesso che si possano scegliere y e z in modo che:

$$x - ct = z \in [0, L]\,, \qquad x + ct = y \in [0, 2L]\,,$$

cosicché valga anche $2L - z \in [0, 2L]$. Questo conduce a

$$ct \le x \le L + ct\,, \qquad -ct \le x \le 2L - ct\,.$$

R.

$$\Omega = \{(x, t) \mid ct < x < L + ct\,, -ct < x < 2L - ct\}\,.$$

3. Si considerino le soluzioni dei due problemi

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= 0\,, && \text{in } \Omega_1, & \Delta u_2 &= 0\,, && \text{in } \Omega_2,\\ u_1(x, y) &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,, && \text{su } \partial\Omega_1, & u_2(x, y) &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,, && \text{su } \partial\Omega_2, \end{aligned}$$

ove

$$\Omega_1 = (1, 2) \times (1, 2)\,, \qquad \Omega_2 = (a, a + 1) \times (1, 2)\,,$$

con $a > 2$.
Si trovino condizioni su a che implichino

$$u_1(x_1, y_1) > u_2(x_2, y_2)\,,$$

per ogni $(x_1, y_1) \in \Omega_1$, $(x_2, y_2) \in \Omega_2$.
Soluzione
Per il principio di massimo si ha che

$$\begin{aligned} u_1(x_1, y_1) &\ge \min_{\partial\Omega_1} u_1 = \min_{(x,y)\in\partial\Omega_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,,\\ u_2(x_2, y_2) &\ge \max_{\partial\Omega_2} u_2 = \max_{(x,y)\in\partial\Omega_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,, \end{aligned}$$

per ogni $(x_1, y_1) \in \Omega_1$, $(x_2, y_2) \in \Omega_2$. Dunque si otterrà la disuguaglianza voluta se risulterà

$$\min_{(x,y)\in\partial\Omega_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} > \max_{(x,y)\in\partial\Omega_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,.$$

D'altra parte, per il significato geometrico di $\operatorname{arctg} y/x$, che nel primo quadrante coincide con l'anomalia polare, si ha

$$\begin{aligned} \min_{(x,y)\in\partial\Omega_1} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} &= \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\,,\\ \max_{(x,y)\in\partial\Omega_2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} &= \operatorname{arctg} \frac{2}{a}\,. \end{aligned}$$

Poiché l'arcotangente è una funzione crescente, si dovrà chiedere

$$\frac{2}{a} < \frac{1}{2}\,.$$

R.

$$a > 4\,.$$

4. Si determinino i coefficienti dello sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx)\,, \qquad 0 < x < \pi\,,$$

ove

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ x - \pi\,, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\,. \end{cases}$$

Calcolare anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\,.$$

Soluzione

Per definizione

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \Big[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\pi + \frac{2}{n}\Big((-1)^n - \cos n\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\,. \end{aligned}$$

Inoltre, si sa per l'identità di Parseval che

$$\sum_{n=1}^{2} (f, \varphi_n)^2 = \|f\|^2\,,$$

ove φ_n *è il sistema ortonormale*

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)\,.$$

Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{2} (f, \varphi_n)^2 = \frac{2}{\pi} \|f\|^2 = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

R.

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1}(\pi - 2) - \frac{4}{\pi n} \cos n\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

5. Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{1}{y^2}u_x + u_y = x\,,$$
$$u\Big(s, \frac{1}{s}\Big) = 1\,, \qquad 0 < s < \infty\,.$$

Determinare l'aperto massimale Ω di esistenza della soluzione u.
SOLUZIONE
A) Risolviamo il sistema delle caratteristiche al suolo

$$\varphi_1' = \frac{1}{\varphi_2^2}\,, \qquad \varphi_1(0) = s\,,$$
$$\varphi_2' = 1\,, \qquad \varphi_2(0) = \frac{1}{s}\,.$$

La seconda equazione è di immediata risoluzione, e dà

$$\varphi_2(\tau; s) = \tau + \frac{1}{s}\,.$$

Dalla prima si ha quindi

$$\varphi_1' = \frac{1}{\Big(\tau + \frac{1}{s}\Big)^2}\,,$$

da cui infine

$$\big(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau; s)\big) = \Bigg(-\frac{1}{\tau + \frac{1}{s}} + 2s, \tau + \frac{1}{s}\Bigg)\,, \quad \tau > -\frac{1}{s}\,.$$

Le caratteristiche al suolo sono dunque i rami di iperbole

$$x = -\frac{1}{y} + 2s\,, \quad 0 < y < \infty\,, s \in (0, \infty)\,.$$

B) Risolviamo poi il problema di Cauchy per l'equazione differenziale sulle caratteristiche al suolo

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{\tau + \frac{1}{s}} + 2s\,,$$
$$U(0) = 1\,.$$

Si ottiene

$$U(\tau; s) = 2s\tau - \ln\Big(\tau + \frac{1}{s}\Big) - \ln s + 1\,, \qquad -\frac{1}{s} < \tau < \infty\,.$$

C) Torniamo alle coordinate cartesiane, risolvendo il sistema

$$-\frac{1}{\tau + \frac{1}{s}} + 2s = x\,,$$
$$\tau + \frac{1}{s} = y\,.$$

Si ricava subito

$$s = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{y}\Big)\,,$$
$$\tau = y - \frac{2}{x + \frac{1}{y}}\,.$$

Le condizioni da imporre sono $\tau + 1/s > 0$, e $s > 0$, ossia

$$y > 0\,, \qquad x + \frac{1}{y} > 0\,.$$

R.

$$u(x,y) = xy - \ln y - \ln\Big(x + \frac{1}{y}\Big) + \ln 2\,,$$
$$(x,y) \in \Omega = \{(x,y) \mid y > 0\,, x + y^{-1} > 0\}\,.$$

6. Risolvere con la formula di rappresentazione per il problema nel semipiano per l'equazione di Laplace il problema

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= 0\,, & x > 0\,, y > 0\,,\\ u(0,y) &= \arcsin\Big(\frac{y}{1+y}\Big)\,, & y > 0\,,\\ u_y(x,0) &= 0\,, & x > 0\,. \end{aligned}$$

Soluzione
Per ricondurre il problema a uno nel semipiano $x > 0$ occorre riflettere il dato su $x = 0$ in modo pari intorno all'origine. Dunque l'estensione del dato sarà

$$\widetilde{u_0}(y) = \arcsin\Big(\frac{|y|}{1+|y|}\Big)\,, \qquad y \in \boldsymbol{R}\,.$$

R.

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \arcsin\Big(\frac{|\eta|}{1+|\eta|}\Big)\frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta\,, \qquad x > 0\,, y > 0\,.$$

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI
ING. AEROSPAZIALE

PROF. DANIELE ANDREUCCI

Prova tecnica del 12/1/2009

1. Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= Cu\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, t > 0\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, & & t > 0\,,\\ u\Big(\frac{\pi}{2},t\Big) &= 0\,, & & t > 0\,,\\ u(x,0) &= \sin x\,, & & 0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \end{aligned}$$

ove D e C sono costanti positive.
Nel caso poi in cui sia $D = C$, si determini il limite

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)\,, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

R. *La soluzione è data da*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n e^{[C-D(2n+1)^2]t} \cos(2n+1)x\,,$$

ove

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1+(-1)^n}{n+1} - \frac{1-(-1)^n}{n}\Big]\,, & & n \ge 1\,,\\ \gamma_0 &= \frac{2}{\pi}\,, & & n = 0\,, \end{aligned}$$

Segue che, se $D = C$,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{2}{\pi}\cos x\,.$$

2. Una funzione $u \in C^2(\boldsymbol{R}^2)$ soddisfa

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, & & \text{in } \boldsymbol{R}^2,\\ u(ct,t) &= 0\,, & & 0 \le t \le \frac{L}{c}\,,\\ u\Big(x,\frac{L}{c}\Big) &= 0\,, & & 0 \le x \le L\,, \end{aligned}$$

ove L, c sono costanti positive.
Determinare un aperto Ω di $\boldsymbol{R}^2$ ove $u \equiv 0$.
R.

$$\Omega = \{(x,t) \mid -L + ct < x < ct\,, -ct < x < 2L - ct\}\,.$$

3. Si considerino le soluzioni dei due problemi

$$\begin{aligned} &\Delta u_1 = 0\,, && \text{in } \Omega_1, && \Delta u_2 = 0\,, && \text{in } \Omega_2, \\ &u_1(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, && \text{su } \partial\Omega_1, && u_2(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, && \text{su } \partial\Omega_2, \end{aligned}$$

ove

$$\Omega_1 = (1,2)\times(1,2)\,, \qquad \Omega_2 = (1,2)\times(a,a+1)\,,$$

con $a > 2$.
Si trovino condizioni su a che implichino

$$u_1(x_1,y_1) < u_2(x_2,y_2)\,,$$

per ogni $(x_1,y_1)\in\Omega_1$, $(x_2,y_2)\in\Omega_2$.
R.

$$a > 4\,.$$

4. Si determinino i coefficienti dello sviluppo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin(nx)\,, \qquad 0 < x < \pi\,,$$

ove

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,, \\ \pi - x\,, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\,. \end{cases}$$

Calcolare anche

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\,.$$

R.

$$\alpha_n = \frac{4}{\pi n^2}\sin n\frac{\pi}{2}\,,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2 = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

5. Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &u_x + \frac{1}{x^2}u_y = y\,, \\ &u\Big(\frac{1}{s}, s\Big) = 0\,, \qquad 0 < s < \infty\,. \end{aligned}$$

Determinare l'aperto massimale Ω di esistenza della soluzione u.
R.

$$u(x, y) = xy - \ln x - \ln\left(y + \frac{1}{x}\right) + \ln 2 - 1\,,$$
$$(x, y) \in \Omega = \{(x, y) \mid x > 0\,, y + x^{-1} > 0\}\,.$$

6. Risolvere con la formula di rappresentazione per il problema nel semipiano per l'equazione di Laplace il problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && x > 0\,, y > 0\,,\\ u(0, y) &= \arcsin\left(\frac{y}{1+y}\right), && y > 0\,,\\ u(x, 0) &= 0\,, && x > 0\,. \end{aligned}$$

R.

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \arcsin\left(\frac{\eta}{1+|\eta|}\right)\frac{x}{x^2 + (y-\eta)^2}\,\mathrm{d}\eta\,, \qquad x > 0\,, y > 0\,.$$