EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI
ING. AEROSPAZIALE

prof. Daniele Andreucci

Prova tecnica del 15/6/2009

1. Trovare con il metodo di Fourier la soluzione di

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ u_x(\pi,t) &= \sin(\beta t)\,, && t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Qui $\beta > 0$ è costante.

Soluzione

Per ridurci a un problema con dati al bordo omogenei passiamo alla nuova incognita

$$v(x,t) = u(x,t) - x\sin(\beta t)\,,$$

che risolve il problema

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= \beta^2 x \sin(\beta t)\,, && 0 < x < \pi\,, t > 0\,, \\ v(0,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ v_x(\pi,t) &= 0\,, && t > 0\,, \\ v(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \\ v_t(x,0) &= -\beta x\,, && 0 < x < \pi\,. \end{aligned}$$

Cerchiamo lo sviluppo in serie

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) \sin \frac{2n+1}{2} x\,.$$

I coefficienti α_n risolvono i problemi

$$\begin{aligned} \alpha_n'' + c^2 \Big(\frac{2n+1}{2}\Big)^2 \alpha_n &= \beta^2 \gamma_{0n} \sin(\beta t)\,, \\ \alpha_n(0) &= 0\,, \\ \alpha_n'(1) &= -\beta\gamma_{0n}\,, \end{aligned}$$

ove

$$\gamma_{0n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin \frac{2n+1}{2} x \,\mathrm{d}x = \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2}\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Dunque, si ha

$$\alpha_n(t) = k_{1n} \cos\Big(c\frac{2n+1}{2}t\Big) + k_{2n} \sin\Big(c\frac{2n+1}{2}t\Big) + z_n(t)\,,$$

ove z_n è una soluzione particolare della e.d.o. non omogenea. Per determinarla, se

$$\beta \neq c\frac{2n+1}{2} \tag{1}$$

si procede con la sostituzione

$$z_n(t) = A_n \sin(\beta t)\,,$$

che conduce a

$$A_n = \frac{\beta^2 \gamma_{0n}}{c^2\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 - \beta^2}\,.$$

Se invece

$$\beta = c\frac{2n_0+1}{2} \tag{2}$$

si procede con la sostituzione

$$z_n(t) = C_{n_0} t \sin(\beta t) + B_{n_0} t \cos(\beta t)\,,$$

che conduce a

$$C_{n_0} = 0\,, \qquad B_{n_0} = -\frac{\beta\gamma_{0n}}{2}\,.$$

Imponendo le condizioni al bordo si ha per $n \geq 0$, se vale (1),

$$k_{1n} = 0\,,$$

$$k_{2n} c\frac{2n+1}{2} + \beta A_n = -\beta\gamma_{0n}\,.$$

Se invece vale (2),

$$k_{1n_0} = 0\,,$$

$$k_{2n_0} c\frac{2n_0+1}{2} + B_{n_0} = -\beta\gamma_{0n_0}\,.$$

R. *Se*

$$\beta \neq c\frac{2n+1}{2}$$

per ogni $n \geq 0$ la soluzione è

$$u(x,t) = x\sin(\beta t) + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{k_{2n}\sin\left(c\frac{2n+1}{2}t\right) + A_n\sin(\beta t)\right\}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right);$$

se invece per un $n_0 \geq 0$ vale

$$\beta = c\frac{2n_0+1}{2}$$

la soluzione è

$$u(x,t) = x\sin(\beta t) + \sum_{n=0, n\neq n_0}^{\infty}\left\{k_{2n}\sin\left(c\frac{2n+1}{2}t\right) + A_n\sin(\beta t)\right\}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$
$$-\left\{\frac{\gamma_{0n_0}}{2}\sin\left(c\frac{2n_0+1}{2}t\right) + c\frac{2n_0+1}{2}\gamma_{0n_0} t\cos(\beta t)\right\}\sin\left(\frac{2n_0+1}{2}x\right).$$

Qui

$$\gamma_{0n} = \frac{8(-1)^n}{(2n+1)^2}\,, \qquad A_n = \frac{\beta^2\gamma_{0n}}{c^2\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 - \beta^2}\,, \qquad k_{2n} = -\frac{2\beta(A_n+\gamma_{0n})}{c(2n+1)}\,.$$

2. Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} \Delta\, u &= xy\,, && \text{in } Q, \\ u(x,y) &= x^2+y^2\,, && \text{su } \partial Q, \end{aligned}$$

ove $Q = [0,1]\times[0,1]$.
Si dimostri che u soddisfa

$$u(x,y) = u(y,x)\,, \qquad \text{per ogni } (x,y)\in Q.$$

Soluzione
Definiamo

$$v(x,y) = u(y,x)\,.$$

Si noti che v risulta definita ancora in Q, e che

$$v_{xx}(x,y) = u_{yy}(y,x)\,, \qquad v_{yy}(x,y) = u_{xx}(y,x)\,.$$

Quindi

$$\Delta\, v(x,y) = \Delta\, u(y,x) = yx\,, \qquad \textit{in } Q.$$

Inoltre

$$v(x,y) = u(y,x) = y^2+x^2\,, \qquad \textit{su } \partial Q.$$

Dunque $w = u - v$ soddisfa

$$\begin{aligned} \Delta\, w &= 0\,, && \textit{in } Q, \\ w(x,y) &= 0\,, && \textit{su } \partial Q, \end{aligned}$$

e perciò $w = 0$ in Q per il principio di massimo. Dunque

$$u(x,y) = v(x,y) = u(y,x)\,, \qquad \textit{per ogni } (x,y)\in Q.$$

3. Si consideri la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} &= -Cu\,, && 0<x<\infty\,, t>0\,, \\ u_x(0,t) &= 0\,, && t>0\,, \\ u(x,0) &= \sin^2 x\,, && 0<x<\infty\,. \end{aligned}$$

Qui D, C sono costanti positive.

Si dimostri che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0\,, \qquad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R}.$$

SOLUZIONE

Mediante una riflessione pari intorno a $x = 0$, possiamo passare a studiare la soluzione v del problema

$$\begin{aligned} v_t - Dv_{xx} &= -Cv\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\ v(x,0) &= \sin^2 x\,, && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

poiché la restrizione di v a $x > 0$ coincide con u.
Introduciamo poi la nuova variabile

$$w(x,t) = e^{Ct} v(x,t)\,,$$

che risolve

$$\begin{aligned} w_t - Dw_{xx} &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, t > 0\,,\\ w(x,0) &= \sin^2 x\,, && -\infty < x < \infty\,. \end{aligned}$$

Teoremi noti implicano che vale

$$0 = \min_{s\in\boldsymbol{R}} \sin^2 s \le w(x,t) \le \max_{s\in\boldsymbol{R}} \sin^2 s = 1\,, \qquad x \in \boldsymbol{R}\,,\ t > 0\,.$$

Dunque

$$0 \le v(x,t) = e^{-Ct} w(x,t) \le e^{-Ct}\,,$$

il che implica che vale la relazione di limite cercata (addirittura in modo uniforme su $\boldsymbol{R}$).

4. Trovare la soluzione di

$$\begin{aligned} xu_x + u_y &= x(1+y)u\,,\\ u(s,0) &= -\frac{1}{\ln s}\,, \qquad s > 1\,. \end{aligned}$$

Trovare anche l'aperto massimale di definizione.

SOLUZIONE

A) Troviamo le caratteristiche al suolo, risolvendo il sistema caratteristico

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi_1\,, && \varphi_1(0) = s\,,\\ \varphi_2' &= 1\,, && \varphi_2(0) = 0\,. \end{aligned}$$

Si ottiene immediatamente

$$(\varphi_1(\tau; s), \varphi_2(\tau, s)) = (se^{\tau}, \tau)\,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R}\,.$$

B) Si risolve quindi la e.d.o. sulle caratteristiche al suolo

$$\begin{aligned} U' &= se^{\tau}(1+\tau)U\,,\\ U(0) &= -\frac{1}{\ln s}\,, \end{aligned}$$

ottenendo per separazione delle variabili

$$U(\tau; s) = -\frac{1}{\ln s} \exp s e^{\tau} \tau \,, \qquad \tau \in \boldsymbol{R} \,.$$

C) Infine si torna alle variabili (x, y) invertendo il sistema

$$s e^{\tau} = x \,, \qquad \tau = y \,,$$

che dà

$$s = x e^{-y} \,, \qquad \tau = y \,.$$

Si noti che la restrizione $s > 1$ implica

$$\ln s = \ln x - y > 0 \,,$$

che definisce l'aperto massimale di definizione, insieme con $x > 0$.
R.

$$u(x, y) = \frac{1}{y - \ln x} e^{xy} \,,$$

definita in

$$\Omega = \{(x, y) \mid x > 0 \,, y < \ln x\} \,.$$

5. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \beta_n + n b_n \alpha_n) \,,$$

ove

$$f(x) = x^2 - \pi^2 = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \,,$$

$$g(x) = e^x = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx \,,$$

in $L^2((-\pi, \pi))$.
Soluzione
È noto che, essendo $f \in C^1([-\pi, \pi])$ con $f(\pi) = f(-\pi)$, allora

$$f'(x) = 2x = \sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx) \,.$$

In effetti $b_n = 0$ per ogni $n \geq 0$ perché f' è dispari (o perché f è pari).
Dunque, ricordando la definizione dei coefficienti di Fourier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n a_n \beta_n + n b_n \alpha_n) = \sum_{i=1}^{\infty} (f', \varphi_i)(g, \varphi_i) \pi^{-1} \,,$$

ove $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ indica il sistema ortonormale di Fourier.

Per una conseguenza dell'identità di Parseval,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f',\varphi_i)(g,\varphi_i)=\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}2xe^{x}\,\mathrm{d}x=2e^{\pi}(\pi-1)+2e^{-\pi}(\pi+1)\,.$$

R.

$$2\pi^{-1}[e^{\pi}(\pi-1)+e^{-\pi}(\pi+1)]\,.$$

6. Esprimere mediante la formula di rappresentazione per l'equazione del calore la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t-Du_{xx}&=0\,, && 0<x<1\,,t>0\,,\\ u_x(0,t)&=0 && t>0\,,\\ u(1,t)&=0 && t>0\,,\\ u(x,0)&=\sin x\,, && 0<x<1\,. \end{aligned}$$

Soluzione

Occorre riflettere il dato iniziale in modo dispari intorno a $x=1$, e in modo pari intorno a $x=0$. Si ottiene

$$\widetilde{u_0}(x)=\begin{cases}-\sin(2-x)\,, & 1<x<2\,,\\ \sin x\,, & 0<x<1\,,\\ |\sin x|\,, & -1<x<0\,,\\ -\sin(2+x)\,, & -2<x<-1\,.\end{cases}$$

R.

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{\boldsymbol{R}}\widetilde{u_0}(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}\,\mathrm{d}\xi\,,\qquad 0<x<1\,,t>0\,,$$

ove

$$\widetilde{u_0}(x)=\begin{cases}-\sin(2-x)\,, & 1<x<2\,,\\ \sin x\,, & 0<x<1\,,\\ |\sin x|\,, & -1<x<0\,,\\ -\sin(2+x)\,, & -2<x<-1\,.\end{cases}$$