ESERCIZI SUPPLEMENTARI 23/5/2003

CORSO DI COMPLEMENTI DI MATEMATICA ING. AEROSPAZIALE
PROF. DANIELE ANDREUCCI

1. Esercizi sull'equazione del calore

Esercizio 1.1. Dimostrare che la soluzione $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$, $Q_T = (0, L) \times (0, T)$ di

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, \qquad & 0 < x < L\,, 0 < t < T\,,\\ u_x(0,t) &= 1\,, & 0 < t < T\,,\\ u_x(L,t) &= -1\,, & 0 < t < T\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

soddisfa

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{[0,L]} u_0\,.$$

Esercizio 1.2. Usando il metodo dell'energia (cioè moltiplicando l'equazione differenziale per u e poi integrando per parti) dimostrare un teorema di unicità, nella classe delle soluzioni $u \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$, per il problema

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0\,, \qquad & 0 < x < L\,, 0 < t < T\,,\\ u_x(0,t) - u(0,t) &= f(t)\,, & 0 < t < T\,,\\ u_x(L,t) + u(L,t) &= g(t)\,, & 0 < t < T\,,\\ u(x,0) &= u_0(x)\,, & 0 < x < L\,. \end{aligned}$$

R. Si arriva a dimostrare per la differenza v di due soluzioni

$$\frac{1}{2}\int_0^L v(x,t)^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^t\int_0^L v_x(x,\tau)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \{v(L,\tau)^2 + v(0,\tau)^2\}\,\mathrm{d}\tau = 0\,.$$

Esercizio 1.3. Risolvere per serie di Fourier

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= -tu\,, \qquad & 0 < x < \pi\,, 0 < t < T\,,\\ u_x(0,t) &= 0\,, & 0 < t < T\,,\\ u_x(\pi,t) &= 0\,, & 0 < t < T\,,\\ u(x,0) &= \max\left(0, 1 - \frac{4}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right)\,, & 0 < x < L\,, \end{aligned}$$

i) applicando direttamente la tecnica di separazione delle variabili; ii) riconducendosi prima a un problema per $v = e^{t^2/2}u$.

R.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-\frac{t^2}{2}-n^2t}\cos(nx)\,,$$

ove

$$a_0=\frac{1}{4}\,,\qquad a_n=\frac{8}{\pi^2n^2}\Big\{2\cos\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)-\cos\Big(\frac{n\pi}{4}\Big)-\cos\Big(\frac{3n\pi}{4}\Big)\Big\}\,,\quad n\geq 1\,.$$

Esercizio 1.4. Trovare la soluzione del problema

$$\begin{aligned} u_t-u_{xx}&=0\,, && 0<x<\infty\,,-\infty<t<\infty\,,\\ u(0,t)&=A\cos(\omega t)\,, && -\infty<t<\infty\,,\end{aligned}$$

nella forma $u(x,t)=e^{-\alpha x}g(x-ct)$ (qui sia i parametri reali α e c, che la funzione g sono da determinare, mentre A e ω sono assegnati).

R.

$$u(x,t)=e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\cos\Big(\sqrt{\frac{\omega}{2}}x-\omega t\Big)\,.$$

Esercizio 1.5. Dimostrare che la soluzione v del problema

$$\begin{aligned} v_t-v_{xx}&=0\,, && 0<x<\infty\,,0<t<\infty\,,\\ v(0,t)&=A\cos(\omega t)\,, && -\infty<t<\infty\,,\\ v(x,0)&=0\,, && 0<x<\infty\,,\end{aligned}$$

soddisfa

$$\lim_{t\to\infty}[v(x,t)-u(x,y)]=0\,,\qquad \text{per ogni } x \text{ fissato,}$$

ove u è la soluzione del problema precedente.

Esercizio 1.6. Risolvere per serie di Fourier

$$\begin{aligned} u_t-\Delta u&=0\,, && x^2+y^2+z^2<R^2\,,0<t\,,\\ u(x,y,z,t)&=0\,, && x^2+y^2+z^2=R^2\,,0<t\,,\\ u(x,y,z,0)&=\cos\Big(\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{R}\Big)\,, && x^2+y^2+z^2<R^2\,.\end{aligned}$$

(*Sugg.* Usare un opportuno sistema di coordinate, in modo che l'equazione si riduca a

$$v_t-v_{rr}=0\,,\qquad v=ru\ .)$$

R.

$$u(r,t)=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n e^{-(\frac{n\pi}{R})^2t}\sin\Big(\frac{n\pi}{R}r\Big)\,,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,$$

ove

$$\beta_n=(-1)^n\frac{2R}{\pi^2}\frac{n}{\Big(n+\frac{1}{2}\Big)^2\Big(n-\frac{1}{2}\Big)^2}\,.$$

Esercizio 1.7. Risolvere per serie di Fourier

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= cu\,, && 0 < x < L\,, 0 < t < +\infty\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && 0 < t < +\infty\,,\\
u(L,t) &= 0\,, && 0 < t < +\infty\,,\\
u(x,0) &= u_0(x) > 0\,, && 0 < x < L\,.
\end{aligned}
$$

Qui $c > 0$. Dimostrare che esiste una costante $c_0 = c_0(L) > 0$ tale che se $c > c_0$, u diviene illimitata per $t \to \infty$, mentre se $c < c_0$, u tende a zero. (*Sugg.* Si usi la trasformazione esponenziale $v = e^{-ct}u$.)
Si osservi la differenza con il problema di Cauchy per e.d.o.

$$
u_t = cu\,, \qquad u(0) = u_0 > 0\,,
$$

la cui soluzione tende sempre a ∞ per $t \to \infty$.

R.

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{(c - \frac{n^2\pi^2}{L^2})t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),
$$

e $c_0 = (\pi/L)^2$.

2. Esercizi sull'equazione di Laplace

Esercizio 2.1. Trovare le soluzioni di

$$
\Delta\, u = 0\,, \qquad \text{in } \Omega = \{x^2 + y^2 < 1\},
$$

con i dati al contorno su $x^2 + y^2 = 1$:

$$
\text{i)}\quad u(x,y) = 2 + x\,; \qquad \text{ii)}\quad u(x,y) = ax^2 + by^2\,,
$$

ove a, $b \in \boldsymbol{R}$.

R.

$$
\text{i)}\quad u(x,y) = 2 + x\,; \qquad \text{ii)}\quad u(x,y) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}(x^2 - y^2)\,.
$$

Esercizio 2.2. Dire quali dei seguenti dati $u_1(x,y)$ sono ammissibili per il problema di Neumann

$$
\begin{aligned}
\Delta\, u &= 0\,, && \text{in } \Omega = \{x^2 + y^2 = 1\},\\
\frac{\partial u}{\partial n} &= u_1\,, && \text{su } \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

a) $u_1 = 3$; b) $u_1 = x^2 - y^2$; c) $u_1 = \cos^3\varphi \sin\varphi$; d) $u_1 = \sin^2\varphi$. (Qui φ è l'usuale anomalia polare.)

R. Sono ammissibili solo b) e c).

Esercizio 2.3. Dimostrare che l'usuale anomalia polare

$$
\varphi : \boldsymbol{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \le 0\,, y = 0\} \to (-\pi, \pi)\,,
$$

è una funzione armonica.

Esercizio 2.4. Risolvere

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && \text{in } \Omega = \{(x,y) \mid 0 < r < r_0\,, 0 < \varphi < \varphi_0\}, \\ u(x,y) &= 0\,, && \text{su } \varphi = 0, \\ u(x,y) &= u_0\,, && \text{su } \varphi = \varphi_0, \\ u(x,y) &= \frac{u_0}{\varphi_0}\varphi\,, && \text{su } r = r_0, \end{aligned}$$

ove φ_0, r_0 e u_0 sono costanti positive.

R. In coordinate polari, $u = u_0\varphi/\varphi_0$.

Esercizio 2.5. Risolvere

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && -\infty < x < \infty\,, 0 < y < \infty \\ u(x,0) &= c\chi_{(0,\infty)}\,, && -\infty < x < \infty\,, \end{aligned}$$

ove c è una costante assegnata. Usare i due metodi: i) formula di rappresentazione nel semipiano; ii) caso particolare del problema precedente.

R.

$$u(x,y) = \frac{c}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big)\,.$$

Esercizio 2.6. Determinare le costanti a e b in modo che il problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= a\,, && x^2 + y^2 = R_1^2\,, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= b\,, && x^2 + y^2 = R_2^2\,, \end{aligned}$$

abbia soluzioni. In questo caso determinarle tutte. (*Sugg.* Si usi un sistema di coordinate opportuno.)

R.

$$aR_1 = bR_2\,, \qquad u(r,\varphi) = aR_1 \ln r + \text{costante}\,.$$

Esercizio 2.7. Risolvere per serie di Fourier il problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, && a^2 < x^2 + y^2 < b^2\,, \\ u(x,y) &= u_0\,, && x^2 + y^2 = a^2\,, \\ u(x,y) &= u_0\chi_{\{y>0\}}\,, && x^2 + y^2 = b^2\,, \end{aligned}$$

ove $b > a > 0$, $u_0 \in \boldsymbol{R}$. (*Sugg.* Si usi un sistema di coordinate opportuno. Impostare almeno lo sviluppo formale in serie di Fourier, osservando che sono ammissibili anche le soluzioni r^{-n}, $\ln r$. Il calcolo effettivo dei coefficienti di Fourier è abbastanza laborioso.)

R. Si ottiene

$$u(r,\varphi) = a_0 + c_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + c_n r^{-n}) \cos n\varphi + (b_n r^n + d_n r^{-n}) \sin n\varphi\,,$$

ove gli a_n, b_n, c_n, d_n vengono determinati dai coefficienti di Fourier dei dati di Dirichlet, e cioè nel nostro caso:

$$
\begin{aligned}
&a_0 + c_0 \ln a = u_0\,, &\qquad a_n a^n + c_n a^{-n} = 0\,, &\qquad b_n a^n + d_n a^{-n} = 0\,,\\
&a_0 + c_0 \ln b = \frac{u_0}{2}\,; &\qquad a_n b^n + c_n b^{-n} = 0\,; &\qquad b_n b^n + d_n b^{-n} = \frac{u_0}{n\pi}[(-1)^n - 1]\,,
\end{aligned}
$$

per $n \geq 1$.

Esercizio 2.8. Risolvere per serie di Fourier il problema

$$
\begin{aligned}
\Delta u &= 0\,, &\qquad & 0 < x < \infty\,, 0 < y < \pi\,,\\
u(x,0) &= 0\,, && 0 < x < \infty\,,\\
u(0,y) &= u_0\,, && 0 < y < \pi\,,\\
u(x,\pi) &= 0\,, && 0 < x < \infty\,,\\
|u(x,y)| & && \text{limitata su tutto } (0,\infty) \times (0,\pi).
\end{aligned}
$$

R.

$$
u(x,y) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1} \sin\big((2n+1)y\big)\,.
$$

La serie si può sommare esplicitamente (ma non è richiesto), ottenendo

$$
u(x,y) = \frac{2u_0}{\pi} \operatorname{arctg}\Big(\frac{\sin y}{\sinh x}\Big)\,.
$$

3. Esercizi sull'equazione delle onde

Esercizio 3.1. Impostare la risoluzione per serie di Fourier dell'equazione delle corde con attrito

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} + \gamma^2 u_t &= 0\,, &\qquad & 0 < x < \pi\,, 0 < t < T\,,\\
u(0,t) &= 0\,, && 0 < t < T\,,\\
u(\pi,t) &= 0\,, && 0 < t < T\,,\\
u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 < x < \pi\,,\\
u_t(x,0) &= u_1(x)\,, && 0 < x < \pi\,,
\end{aligned}
$$

ove $c > 0$, $\gamma > 0$.
Trovare effettivamente i coefficienti di Fourier nel caso $\gamma < \sqrt{2}c$, $u_0 \equiv 0$, $u_1 \equiv 1$.

R.

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n\pi\gamma^2\omega_n}[1 - (-1)^n] e^{-\frac{\gamma^2}{2}t} \sin(\omega_n t) \sin(nx)\,,
$$

ove $\omega_n = \sqrt{4n^4c^4 - \gamma^4}/2$.

Esercizio 3.2. Risolvere il problema

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - \Delta\, u &= 0\,, && (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3\,, 0 < t < +\infty\,,\\
u(x,y,z,0) &= u_0(r)\,, && (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3\,,\\
u_t(x,y,z,0) &= u_1(r)\,, && (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3\,,
\end{aligned}
$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (*Sugg.* Scrivere il laplaciano in coordinate sferiche, passare a un problema per $v = ru$ in $r \geq 0$, e usare la formula di D'Alembert con le opportune osservazioni.)

R.

$$
u(r,t) = \frac{1}{2r}\Big\{(r-ct)u_0\big(|r-ct|\big) + (r+ct)u_0\big(|r+ct|\big)\Big\} + \frac{1}{2cr}\int\limits_{r-ct}^{r+ct} s u_1\big(|s|\big)\,\mathrm{d}s\,.
$$

Esercizio 3.3. Si considerino le soluzioni di

$$
u_{tt} - c^2\,\Delta\, u = \mu u\,, \qquad (x,y,z) \in \boldsymbol{R}^3\,,
$$

del tipo

$$
v(x,y,z,t) = f(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x} - bt) = f(a_1x + a_2y + a_3z - bt)\,,
$$

ove f non è identicamente nulla, $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$, a_i, $b \in \boldsymbol{R}$, $\|\boldsymbol{a}\| = 1$. Queste soluzioni si dicono onde piane (perché?).

1) Se $\mu = 0$, si dimostri che una qualunque v come sopra, con $f \in C^2(\boldsymbol{R})$, è soluzione se e solo se $b^2 = c^2$.

2) Se $\mu \neq 0$, determinare le possibili onde piane al variare di b.

R. 2) $b^2 = c^2$: non esistono onde piane.
$b^2 \neq c^2$: posto $\omega^2 = |\mu/(c^2-b^2)|$, $\omega > 0$, si distingue: i) $\mu/(c^2-b^2) > 0$: $f(s) = c_1\cos(\omega s + c_2)$; ii) $\mu/(c^2-b^2) < 0$: $f(s) = c_1e^{\omega s} + c_2e^{-\omega s}$.