



Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

**Formule di riferimento per ripetere le lezioni di Meccanica applicata alle macchine
sulla dinamica (analisi dinamica di sistemi multi-body)
Allievi iscritti al corso di Ingegneria Meccanica**

Prof. Belfiore
A.A. 2008- 2009

Analisi Cinematica col metodo delle equazioni di vincolo

Siano assegnate n variabili lagrangiane q_i , $i = 1..n$, vincolate tra loro da m equazioni di vincolo del tipo

$$\begin{cases} \psi_1(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \\ \dots \\ \psi_m(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \end{cases}$$

Delle n coordinate q , si indichino con x_i , $i=1..F$, le F coordinate corrispondenti ai membri moventi (input), essendo F il numero di gradi di libertà del robot, e con y_i , $i=1..m$, le restanti coordinate lagrangiane corrispondenti ai membri cedenti, essendo $n = m + F$.

Il sistema suddetto si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \psi_1(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, \dots, x_F) = 0 \\ \dots \\ \psi_m(y_1, y_2, \dots, y_m, x_1, \dots, x_F) = 0 \end{cases}$$

ove si intende che le F coordinate x_i siano note e che le funzioni di vincolo ψ dipendano ora delle sole y .

In termini vettoriali le m funzioni di vincolo si possono scrivere nella forma

$$[\psi(y, \bar{x})]_m = [0]_m$$

nella quale i pedici indicano dimensioni del vettore $[\psi]$ delle m funzioni scalari di vincolo e del vettore nullo $[0]$.

La matrice Jacobiana delle funzioni di vincolo è definita come la matrice il cui elemento i - j è la derivata parziale della funzione di vincolo i -esima, derivata rispetto alla variabile j -esima

$$[\psi_q]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \cdot & \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Tale matrice si può partizionare raggruppando le variabili indipendenti x (moveni) e quelle dipendenti y (cedenti)

$$[\psi_q]_{m \times n} = \left[\begin{bmatrix} \cdot & \frac{\partial \psi_i}{\partial y_j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{m \times m} \parallel \begin{bmatrix} \cdot & \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}_{m \times F} \right] = [[\psi_y]_{m \times m} \parallel [\psi_x]_{m \times F}]$$

esplicitando i minori $[J_y]$ e $[J_x]$.

Ciò posto, l'analisi della configurazione può effettuarsi, in generale, per qualsiasi sistema, usando metodi numerici iterativi quali, ad esempio, il metodo di Newton Raphson, che si basa su approssimazioni successive mediante la seguente formula

$$[y]_m^{i+1} = [y]_m^i - ([\psi_y]_{m \times m})^{-1} [\psi_y]_m^i$$

Derivando le equazioni di vincolo, avendo risolto il numericamente il problema della configurazione mediante la formula precedente, si ottiene la relazione che permette di conoscere le velocità.

$$[\dot{y}]_m = -([\psi_y]_{m \times m})^{-1} [\psi_x]_{m \times F} [\dot{x}]_F$$

Infine, note anche le velocità, si procede, mediante la derivazione della formula precedente al calcolo delle accelerazioni, in virtù della relazione

$$[\ddot{y}]_m = -([\psi_y]_{m \times m})^{-1} [\psi_x]_{m \times F} [\ddot{x}]_F - ([\psi_y]_{m \times m})^{-1} [\eta]_m$$

essendo

$$[\eta]_m = [\psi_y]^{-1} ([\psi_y] \ddot{y})_y [\dot{y}] + [\psi_y]^{-1} ([\psi_x] \dot{x})_x [\dot{x}] .$$

Questo metodo è molto generale perché permette la libera scelta delle variabili destinate a rappresentare lo stato del sistema.

Analisi Dinamica con il metodo generale dei moltiplicatori di Lagrange.

Supponendo il sistema ideale (privo di attrito) e con vincoli non dipendenti dal tempo le equazioni della dinamica possono ricondursi all'espressione matriciale

$$[M] \ddot{q} = [f] + [r]$$

ove $[M]$ è una matrice delle inerzie del sistema, mentre f ed r rappresentano le forze esterne applicate e quelle vincolari, rispettivamente. Le dimensioni di M dipendono dal numero di corpi che compone il sistema e dal considerare, o meno, il moto del sistema nel piano o nello spazio.

Le reazioni vincolari si esprimono in funzione dei moltiplicatori di Lagrange λ , per cui l'equazione di riferimento si riconduce alla relazione

$$[M] \ddot{q} - [\psi_q]^T [\lambda] = [f]$$

D'altra parte, derivando il vettore delle equazioni di vincolo

$$[\psi(q)] = [0]$$

ove si mette in evidenza la dipendenza delle funzioni di vincolo dalle variabili lagrangiane q , si ottiene

$$[\psi_q(q)][\dot{q}] = [0]$$

la quale, ulteriormente derivata, fornisce la relazione

$$[\psi_q(q)][\ddot{q}] + ([\psi_q(q)]_q)[\dot{q}] = [0]$$

che si può riscrivere, introducendo il vettore

$$[\gamma] = -([\psi_q(q)]_q)[\dot{q}]$$

nella forma

$$[\psi_q(q)][\ddot{q}] = [\gamma] \quad .$$

Assemblando quest'ultima relazione con la equazione matriciale della dinamica si ottiene un'unica equazione algebrico-differenziale

$$\begin{bmatrix} [M] & [\psi_q(q)]^T \\ [\psi_q(q)] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\ddot{q}] \\ [-\lambda] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [f] \\ [\gamma] \end{bmatrix}$$

del tipo

$$[A][a] = [b]$$

che può essere risolta iterativamente, qualora siano definite le condizioni iniziali del sistema ad un istante determinato per le posizioni $[q^o]$ e le velocità $[\dot{q}^o]$, che, tuttavia, dovendo essere coerenti con i vincoli, dovranno soddisfare le condizioni

$$[\psi(q^o)] = 0 \quad \text{e} \quad [\psi_q(q^o)][\dot{q}^o] = 0 \quad .$$

Secondo l'approccio iterativo, nella sua forma più semplificata, note le posizioni e le velocità all'istante iniziale, si calcolano dapprima le accelerazioni, mediante inversione del sistema della dinamica

$$[a^o] = [A^o]^{-1}[b^o] .$$

A seguire, si calcolano le velocità e posizioni all'istante immediatamente successivo, sapendo che

$$[\dot{q}^{i+1}] = [\dot{q}^i] + [\ddot{q}^i]\Delta t \quad \text{e} \quad [q^{i+1}] = [q^i] + [\dot{q}^i]\Delta t .$$

In definitiva, è possibile simulare il comportamento dinamico del sistema e prevederne l'evoluzione del moto.